Ejercicio 6. Sea $|\varphi_0\rangle = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ normalizado, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Encuentra un operador unitario en $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ que borre $|{+}{+}\rangle$ y $|{-}{-}\rangle$ usando $|\varphi_0\rangle$ como vector de borrado, es decir, que los aplique respectivamente en $\lambda_1\,|+\rangle \otimes |\varphi_0\rangle$ y $\lambda_2\,|-\rangle \otimes |\varphi_0\rangle$ con algunos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

Consideremos $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (para cualquier otra elección hay un ejemplo similar). Queremos que el operador actúe como

$$|{+}{+}\rangle \mapsto |+\rangle \otimes |\varphi_0\rangle = \alpha\,|{+}{+}\rangle + \beta\,|{+}{-}\rangle \qquad \text{y} \qquad |{-}{-}\rangle \mapsto |-\rangle \otimes |\varphi_0\rangle = \alpha\,|{-}{+}\rangle + \beta\,|{-}{-}\rangle\,.$$

Esto implica que la matriz del operador en la base lexicográfica $\{|{+}{+}\rangle, |{+}{-}\rangle, |{-}{+}\rangle, |{-}{-}\rangle\}$ tiene $(\alpha, \beta, 0, 0)^t$ como primera columna y $(0, 0, \alpha, \beta)^t$ como última columna. Si las completamos con otras dos columnas que formen una base ortonormal obtendremos una matriz unitaria. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta^* & 0 & 0 \\ \beta & \alpha^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^* & \alpha \\ 0 & 0 & -\alpha^* & \beta \end{pmatrix}.$$

Un ejemplo del operador unitario pedido es aquel que tiene esta matriz en la base lexicográfica.

Ejercicio 7. Escribe la matriz de $P = 1 + \sum_{j=1}^{3} \sigma_j \otimes \sigma_j$ en la base de Bell.

Sabemos que P es dos veces el operador de intercambio. Este último deja invariante $|{+}{+}\rangle + |{-}{-}\rangle$, $|{+}{-}\rangle + |{-}{+}\rangle$ y $|{+}{+}\rangle - |{-}{-}\rangle$, mientras que cambia de signo $|{+}{-}\rangle - |{-}{+}\rangle$. Por tanto, multiplica por 2 cada $|\Phi_j\rangle$ excepto a $|\Phi_2\rangle$ que además lo cambia de signo. Así pues, la matriz buscada es $\mathrm{diag}(2, 2, -2, 2)$.

Ejercicio 8. Al aplicar el esquema de teletransporte, calcula la probabilidad de que el estado se haya teletransportado tras la medición de Alicia. Es decir, de que Beatriz no tenga que aplicar ningún operador unitario.

El estado de partida era

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{3} |\Phi_j\rangle \otimes \sigma_j\,|\varphi\rangle \qquad \text{bajo el convenio } \sigma_0 = 1.$$

La probabilidad de que tras la medición de Alicia el estado colapse a $|\phi\rangle = |\Phi_j\rangle \otimes \sigma_j\,|\varphi\rangle$ para un j fijado es $|\langle\Psi|\phi\rangle|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. En particular, esta es la probabilidad de que colapse a $|\Phi_j\rangle \otimes |\varphi\rangle$ (caso $j = 0$) y que, de este modo, Beatriz obtenga $|\varphi\rangle$ sin aplicar ningún operador.

Ejercicio 9. Demuestra que el operador C que permuta cíclicamente tres partículas con un estado de espín, esto es, el operador $C(\vec{u}_1 \otimes \vec{u}_2 \otimes \vec{u}_3) = \vec{u}_3 \otimes \vec{u}_1 \otimes \vec{u}_2$ en $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, es igual a $\frac{1}{4} \sum_{j,k=0}^{3} \sigma_j \otimes (\sigma_j \sigma_k) \otimes \sigma_k$, donde se usa el convenio $\sigma_0 = 1$. Encuentra una expresión similar para su inverso que aplica $\vec{u}_1 \otimes \vec{u}_2 \otimes \vec{u}_3$ en $\vec{u}_2 \otimes \vec{u}_3 \otimes \vec{u}_1$. Indicación: ¿Cómo se puede expresar C en términos del operador que intercambia dos partículas?

Si S es el operador de intercambio, entonces

$$(1 \otimes S)(\vec{u}_1 \otimes \vec{u}_2 \otimes \vec{u}_3) = \vec{u}_1 \otimes \vec{u}_3 \otimes \vec{u}_3 \qquad \text{y} \qquad (S \otimes 1)(\vec{u}_1 \otimes \vec{u}_3 \otimes \vec{u}_2) = \vec{u}_3 \otimes \vec{u}_1 \otimes \vec{u}_2.$$

Así pues,

$$C = (S \otimes 1)(1 \otimes S) = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{3} (\sigma_j \otimes \sigma_j \otimes 1) \sum_{k=0}^{3} (1 \otimes \sigma_k \otimes \sigma_k) = \frac{1}{4} \sum_{j,k=0}^{3} \sigma_j \otimes (\sigma_j \sigma_k) \otimes \sigma_k.$$

El operador de intercambio es su propio inverso, por tanto, $C^{-1} = \big((S \otimes 1)(1 \otimes S)\big)^{-1} = (1 \otimes S)(S \otimes 1)$ y el cálculo es similar al anterior salvo intercambiar el orden de $\sigma_j \otimes \sigma_j \otimes 1$ y $1 \otimes \sigma_k \otimes \sigma_k$, con lo que resulta $\frac{1}{4} \sum_{j,k=0}^{3} \sigma_j \otimes (\sigma_k \sigma_j) \otimes \sigma_k$.