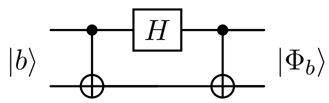
Hoja 8 (sección 2.4)

Ejercicio 1. Demuestra que CNOT $\neq U \otimes V$ con U y V operadores unitarios actuando sobre un qubit.

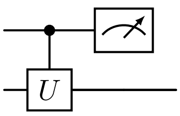
Ejercicio 2. Prueba la igualdad CNOT $= |0\rangle\langle 0| \otimes 1 + |1\rangle\langle 1| \otimes X$ donde X indica la puerta correspondiente a σ_1 y halla la matriz de CNOT en la base computacional $\mathcal{B}_2$.

Ejercicio 3. Muestra que para $b \in B_2$ se cumple lo que se afirma en el siguiente circuito:

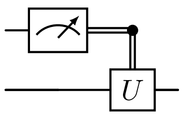


donde $|\Phi_b\rangle$ son los estados de Bell salvo por una constante multiplicativa global en $|\Phi_2\rangle$ y hacemos la identificación de b con su valor en binario.

Ejercicio 4. Comprueba que para cualquier operador unitario U en $\mathbb{C}^2$ los circuitos

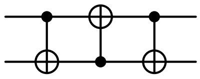


y



son equivalentes. Es decir, que actuando sobre un estado genérico dan los mismos resultados.

Ejercicio 5. Demuestra que el circuito



representa el operador de intercambio en $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, es decir, el que aplica $|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle$ en $|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle$.

Ejercicio 6. Calcula la matriz de DU_0 del algoritmo de Grover en la base computacional para $n = 2$ cuando $b_0 = 01$.

Ejercicio 7. Con la notación del algoritmo de Grover, demuestra que la probabilidad p admite una fórmula del tipo $p = \big(P(2^{-n/2})\big)^2$ con $P \in \mathbb{Z}[x]$ de grado $2k+1$.

Ejercicio 8. Considera la función $D_m(x) = 2^{-m} \sum_{\ell=0}^{2^m-1} e^{2\pi i \ell x}$, que aparece en el algoritmo de Shor, y demuestra que verifica $\big|D_m(x)\big|^2 = \frac{\operatorname{sen}^2(2^m \pi x)}{2^{2m} \operatorname{sen}^2(\pi x)}$ y $\int_{-1/2}^{1/2} \big|D_m\big|^2 = 2^{-m}$.

Ejercicio 9. Para $n = a = 3$ y $N = 7$ calcula la matriz de U_1 del algoritmo de Shor en la base computacional $\mathcal{B}_3$ indicando, para mayor brevedad, solo los elementos no nulos. Halla el menor $d > 1$ tal que $U_d = U_1$.