Hoja 7 (sección 2.3)

Ejercicio 1. Supongamos que en un intercambio de claves QKD Alicia usa las listas de letras y signos $zxxzzz$ y $+-+---$. Si Beatriz emplea la lista de letras $zzxzxz$, halla las posibilidades para su lista de signos y las probabilidades con las que aparecen. Con la traducción en bits $+\mapsto 0$, $-\mapsto 1$, ¿qué clave acordarían?

Ejercicio 2. Explica con detalle por qué al compartir claves con el procedimiento QKD descrito se cumple $\text{Prob}(s_{n_j} \ne s'_{n_j} \text{ para algún } j \le m) = 1 - 3^m/4^m$ en caso de que haya habido espionaje.

Ejercicio 3. En la prueba del teorema de no clonación se usa que en un espacio de Hilbert V sobre $\mathbb{C}$ con $\dim V > 1$ siempre existen $\vec{v}, \vec{w} \in V$ unitarios que no son ni ortogonales ni linealmente dependientes. ¿Sabrías dar una prueba rigurosa y breve? ¿Qué ocurre en los teoremas de no clonación y de no borrado si se permite $\dim V = 1$?

Ejercicio 4. Sea $T = \frac{1}{2}(1+\sigma_1)\otimes 1 + \frac{1}{2}(1-\sigma_1)\otimes\sigma_3$. Halla la matriz de T en la base usual $\{|{+}{+}\rangle, |{+}{-}\rangle, |{-}{+}\rangle, |{-}{-}\rangle\}$. Comprueba que T define un operador unitario y que clona tanto $|x+\rangle$ como $|x-\rangle$ tomando $\vec{v}_0 = |x+\rangle$. Encuentra también un estado que no sea clonado por T.

Ejercicio 5. Halla el máximo número de estados de la forma $|\varphi\rangle\otimes|+\rangle$ en $\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$ tales que existe un operador unitario que los aplica en $|\varphi\rangle\otimes|\varphi\rangle$. Generaliza el resultado a $\mathbb{C}^2 \otimes \overset{2N \text{ veces}}{\cdots\cdots} \otimes \mathbb{C}^2$. Indicación: Revisa la demostración del teorema de no clonación y nota que se cuentan estados, no de vectores, por tanto, los factores escalares no cambian el resultado.

Ejercicio 6. Sea $|\varphi_0\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$ normalizado, $|\alpha|^2+|\beta|^2 = 1$. Encuentra un operador unitario en $\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$ que borre $|{+}{+}\rangle$ y $|{-}{-}\rangle$ usando $|\varphi_0\rangle$ como vector de borrado, es decir, que los aplique respectivamente en $\lambda_1|+\rangle\otimes|\varphi_0\rangle$ y $\lambda_2|-\rangle\otimes|\varphi_0\rangle$ con algunos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 7. Escribe la matriz de $P = 1 + \sum_{j=1}^{3}\sigma_j\otimes\sigma_j$ en la base de Bell.

Ejercicio 8. Al aplicar el esquema de teletransporte, calcula la probabilidad de que el estado se haya teletransportado tras la medición de Alicia. Es decir, de que Beatriz no tenga que aplicar ningún operador unitario.

Ejercicio 9. Demuestra que el operador C que permuta cíclicamente tres partículas con un estado de espín, esto es, el operador $C(\vec{u}_1\otimes\vec{u}_2\otimes\vec{u}_3) = \vec{u}_3\otimes\vec{u}_1\otimes\vec{u}_2$ en $\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$, es igual a $\frac{1}{4}\sum_{j,k=0}^{3}\sigma_j\otimes(\sigma_j\sigma_k)\otimes\sigma_k$, donde se usa el convenio $\sigma_0 = 1$. Encuentra una expresión similar para su inverso que aplica $\vec{u}_1\otimes\vec{u}_2\otimes\vec{u}_3$ en $\vec{u}_2\otimes\vec{u}_3\otimes\vec{u}_1$. Indicación: ¿Cómo se puede expresar C en términos del operador que intercambia dos partículas?