

Hoja 6 (sección 2.2)

EJERCICIO 1. Explica por qué el isomorfismo lexicográfico entre $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ y \mathbb{C}^{mn} satisface $\Phi(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \Phi(\vec{v} \otimes \vec{w}) = (\vec{a} \cdot \vec{v})(\vec{b} \cdot \vec{w})$ donde “ \cdot ” indica el producto escalar (complejo) usual. Explica también la igualdad $\Phi(\vec{e}_j \otimes \vec{e}_k) = \vec{e}_{(j-1)n+k}$ donde \vec{e}_j son los vectores de la base canónica en cada espacio.

EJERCICIO 2. Calcula las matrices en la base $\{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$ de $S_3 \otimes S_2$ y $S_1 \otimes S_3$ con S_j los operadores de espín. Halla también el efecto del producto (la composición) de estos dos operadores sobre $|y+\rangle \otimes |x-\rangle$.

EJERCICIO 3. Consideremos un operador de rotación $R = R_{\vec{u}}(\alpha)$ y el vector normalizado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+-\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-+\rangle$. Demuestra que sean cuales sean \vec{u} y α se cumple que $(R \otimes R)|\psi\rangle$ está normalizado y representa el mismo estado que $|\psi\rangle$. Indicación: Si $R|+\rangle = |\vec{n}+\rangle$ muestra que $R|-\rangle$ y $|\vec{n}-\rangle$ representan el mismo estado.

EJERCICIO 4. Sea $\{|1\rangle, \dots, |n\rangle\}$ una base ortonormal de \mathbb{C}^n y A una matriz compleja $n \times n$. Demuestra la fórmula $\text{Tr}(A) = \sum_{k=1}^n \langle k|A|k\rangle$ donde $\text{Tr}(A)$ es la traza de A . Para un producto de Kronecker de matrices prueba $\text{Tr}(A \otimes B) = \text{Tr}(A)\text{Tr}(B)$.

EJERCICIO 5. Consideremos los operadores $\mathcal{T}_j = S_j \otimes 1 + 1 \otimes S_j$, $j = 1, 2, 3$, en $V = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Halla una base ortonormal $\{|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle\}$ de V tal que $\mathcal{T}_j|\psi_0\rangle = 0$ para todo j y $(\mathcal{T}_1^2 + \mathcal{T}_2^2 + \mathcal{T}_3^2)|\psi_k\rangle = 2\hbar^2|\psi_k\rangle$ para $k = 1, 2, 3$. Indicación: Halla primero $|\psi_0\rangle$ y completa la base como desees guardando la ortonormalidad. Nota: Esto es parte de una regla para sumar momentos angulares que se indica con la críptica fórmula $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = \mathbf{0} \oplus \mathbf{1}$.

EJERCICIO 6. Con la notación del ejercicio anterior, comprueba $[\mathcal{T}_1^2 + \mathcal{T}_2^2, \mathcal{T}_3] = 0$. Indicación: ¿Por qué equivale a comprobar $[\mathcal{T}_1^2 + \mathcal{T}_2^2 + \mathcal{T}_3^2, \mathcal{T}_3] = 0$?

EJERCICIO 7. Estudia si $\frac{6+3i}{20}|+++ \rangle + \frac{9+3i}{20}|+-+ \rangle + \frac{3}{20}|--- \rangle + \frac{2i-1}{5}|++- \rangle + \frac{3i-1}{5}|+-- \rangle + \frac{i}{5}|--- \rangle$ se puede escribir como $\vec{v} \otimes \vec{w}$ con $\vec{v} \in \mathbb{C}^2$ y $\vec{w} \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ o como $\vec{a} \otimes \vec{b}$ con $\vec{a} \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ y $\vec{b} \in \mathbb{C}^2$ con $\vec{v}, \vec{w}, \vec{a}, \vec{b}$ normalizados.

EJERCICIO 8. En \mathbb{C}^2 sean $|\Psi_\alpha\rangle = \cos \alpha|+\rangle + \sin \alpha|-\rangle$, $|\Psi_\alpha^\perp\rangle = -\sin \alpha|+\rangle + \cos \alpha|-\rangle$ con $\alpha \in [0, 2\pi)$ y los operadores $P_\alpha = |\Psi_\alpha\rangle\langle\Psi_\alpha|$ y $P_\alpha^\perp = |\Psi_\alpha^\perp\rangle\langle\Psi_\alpha^\perp|$. Explica por qué $M_0 = P_\alpha \otimes 1$ y $M_1 = P_\alpha^\perp \otimes 1$ son operadores de medición en $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ de acuerdo con el Postulado 3.

EJERCICIO 9. Prueba que tras una medición correspondiente a los operadores M_0 y M_1 del ejercicio anterior el estado de Bell $|\Phi_0\rangle$ colapsa a $|\Psi_\alpha\rangle \otimes |\Psi_\alpha\rangle$ o a $|\Psi_\alpha^\perp\rangle \otimes |\Psi_\alpha^\perp\rangle$ y calcula con qué probabilidades.

EJERCICIO 10. Con la notación de los dos ejercicios anteriores, supongamos que medimos $|\Phi_0\rangle$ comprobando si la primera partícula está en el estado $|\Psi_\alpha\rangle$ y la segunda en $|\Psi_\beta\rangle$, esto es, utilizando $P_\alpha \otimes P_\beta$ como uno de los operadores de medición. Muestra que la probabilidad de que $|\Phi_0\rangle$ colapse a $|\Psi_\alpha\rangle \otimes |\Psi_\beta\rangle$ es $\frac{1}{2} \cos^2(\alpha - \beta)$.

EJERCICIO 11. Sean $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3 \in \mathbb{R}^3$ vectores unitarios distintos en el semiplano $\{x > 0, y = 0\}$ tales que \vec{n}_2 apunta en la dirección de la bisectriz del ángulo entre \vec{n}_1 y \vec{n}_3 . Demuestra que

contradican la desigualdad de Bell $p_{13} \leq p_{12} + p_{23}$ donde $p_{k\ell} = |\langle \Phi_2 | \psi_{k\ell} \rangle|^2$ con $|\psi_{k\ell}\rangle = |\vec{n}_k+\rangle \otimes |\vec{n}_\ell+\rangle$.

EJERCICIO 12. Demuestra $\exp(S \otimes 1 + 1 \otimes T) = \exp(S) \otimes \exp(T)$. Indicación: Utiliza como paso intermedio $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{n!} \binom{n}{m} S^m \otimes T^{n-m}$.