Hoja 5 (sección 2.1)

Ejercicio 1. Comprueba que las matrices de Pauli son matrices unitarias y determinan una base del espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ formado por las matrices hermíticas 2×2 de traza cero.

Ejercicio 2. Justifica que para cualquier vector unitario $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ la matriz $\vec{n} \cdot \vec{\sigma}$ es unitaria y tiene autovalores 1 y -1. ¿Cuáles serían si permitiésemos vectores no unitarios?

Ejercicio 3. Demuestra $\mathrm{Tr}\big((\vec{v} \cdot \vec{\sigma})\sigma_j\big) = 2v_j$ para cualquier $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ donde Tr indica la traza.

Ejercicio 4. Comprueba que $\vec{S} \cdot \vec{S} = \frac{3}{4}\hbar^2$ y $\vec{S} \times \vec{S} = i\hbar\vec{S}$ se verifican con $S_j = \frac{\hbar}{2}\sigma_j$. Indicación: Debido a la no conmutatividad, en el producto vectorial es importante el orden. Parte del problema es entender la definición correcta.

Ejercicio 5. A veces se define una cuarta matriz de Pauli σ_0 como la identidad. Comprueba que para $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ la matriz $\sum_{j=0}^{3} x_j\sigma_j$ es hermítica con determinante $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ (esta cantidad es relevante en relatividad). Explica por qué $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ es una base del espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$) de matrices hermíticas 2×2.

Ejercicio 6. Demuestra $\exp(-i\beta\vec{u} \cdot \vec{\sigma}) = \cos\beta - i\vec{u} \cdot \vec{\sigma} \operatorname{sen}\beta$ para $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ unitario y $\beta \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 7. Prueba que si U es una matriz unitaria 2×2 de determinante uno entonces $U = R_{\vec{u}}(\alpha)$ para cierto $\vec{u}$ (unitario) y cierto $\alpha \in [0, 2\pi]$. Indicación: Comienza probando que U satisface $|u_{11}|^2 + |u_{21}|^2 = 1$, $u_{12} = -u_{21}^*$, $u_{22} = u_{11}^*$.

Ejercicio 8. Comprueba que $R_{\vec{e}_2}^{-1}(\frac{\pi}{2})R_{\vec{e}_1}(\pi)R_{\vec{e}_2}(\frac{\pi}{2}) = R_{\vec{e}_3}(\pi)$ donde $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 9. Verifica la identidad $|G\vec{n}\rangle = \lambda R_{\vec{u}}(\alpha)\,|\vec{n}\rangle$ para $\vec{u} = (0, 0, 1)$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ y $\vec{n}$ unitario con $n_2 = 0$.

Ejercicio 10. Sean J_1, J_2 y J_3 las matrices 3×3 tales que el elemento jk de J_ℓ es 1 si $i\sigma_j\sigma_k = \sigma_\ell$, -1 si $i\sigma_j\sigma_k = -\sigma_\ell$ y 0 en otro caso. Escribe explícitamente estas matrices y comprueba que $\exp(\alpha J_3)$ es la matriz del giro de ángulo α alrededor del eje Z.

Ejercicio 11. Con la notación del problema anterior y $\vec{v} \cdot \vec{J} = v_1J_1 + v_2J_2 + v_3J_3$, se sabe que $\exp(\vec{v} \cdot \vec{J})$ es una matriz ortogonal para cualquier $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ (porque su inversa es $\exp(-\vec{v} \cdot \vec{J})$, que coincide con su traspuesta). Dando esto por conocido, prueba que si $\|\vec{v}\|$ no es un múltiplo entero de 2π es la matriz de un giro no trivial (distinto de la identidad) con eje $\vec{v}/\|\vec{v}\|$ o $-\vec{v}/\|\vec{v}\|$. Indicación: Halla los autovalores de $\vec{v} \cdot \vec{J}$ y usa $(\vec{v} \cdot \vec{J})\vec{v} = \vec{0}$ para determinar el eje.