Hoja 4 (sección 1.4)

EJERCICIO 1. Calcula la energía en términos de la amplitud, la masa y la frecuencia angular para el oscilador armónico clásico. Comprueba que el resultado tiene realmente dimensiones de energía.

EJERCICIO 2. Sean A y B matrices hermíticas ($A^\dagger = A$, $B^\dagger = B$) de la misma dimensión. Deduce que $[A, B] = cB$ con $c \in \mathbb{C}$ implica $c = 0$ probando primero que $[A, B^2] = 2cB^2$ y que $\mathrm{Tr}([A, B^2]) = 0$ con Tr la traza. Indicación: Recuerda las propiedades de la traza y que las matrices hermíticas tienen autovalores reales.

EJERCICIO 3. Comprueba que $y = e^{-x^2/2}$ satisface $y'' + y = x^2 y$. Utiliza esta relación para obtener una solución del oscilador armónico cuántico llevando a cabo un cambio $y(x) \mapsto y(bx)$. ¿Qué energía tiene?

EJERCICIO 4. Sean $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tales que $BAB^{-1} = cA^{-1}$ con $c \in \mathbb{C}$. Demuestra que si $\vec{v}$ es autovector de A, $B\vec{v}$ también lo es. Comprueba que cualquier $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ simétrica lo cumple con $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. ¿Sabrías explicar geométricamente por qué B intercambia los autovectores?

EJERCICIO 5. Demuestra $[a, a^\dagger] = 1$ y $[\widehat{N}, a^\dagger] = a^\dagger$.

EJERCICIO 6. Halla la función de ondas (independiente del tiempo) correspondiente al autoestado $|1\rangle$ en el oscilador armónico. Prueba que la correspondiente a $|n\rangle$ es de la forma $P_n\psi_0$ con P_n un polinomio de grado n que cumple $P_n(x) = (-1)^n P_n(-x)$.

EJERCICIO 7. Demuestra que $\langle n_1|\widehat{x}|n_2\rangle$ es $\sqrt{\hbar\, \text{máx}(n_1, n_2)/(2m\omega)}$ si $|n_1 - n_2| = 1$ y cero en otro caso.

EJERCICIO 8. Demuestra $\langle\alpha|\widehat{N}|\alpha\rangle = \alpha^2$ para un estado coherente $|\alpha\rangle$, comprueba $(a + a^\dagger)^2 = a^2 + (a^\dagger)^2 + 2\widehat{N} + 1$ y usa estos resultados para verificar $\sigma_x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$.

EJERCICIO 9. Comprueba la relación $\langle 0|\alpha\rangle = e^{-\alpha^2/2}$ para $\alpha \in \mathbb{R}$ con $|\alpha\rangle$ estado coherente. Nota: Esta fórmula se empleará en los dos ejercicios siguientes.

EJERCICIO 10. Demuestra que la probabilidad de que al medir la energía de $|\alpha, t\rangle$ para t fijado se obtenga E_n sigue una distribución de Poisson.

EJERCICIO 11. Demuestra que los estados coherentes verifican $|\alpha\rangle = e^{-\alpha^2/2} \exp(\alpha a^\dagger)\, |0\rangle$.

EJERCICIO 12. Un resultado sobre exponenciales de operadores afirma que si $[[A, B], A] = [[A, B], B] = 0$ entonces se cumple $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) \exp(-\frac{1}{2}[A, B])$. Dándolo por sabido deduce de ello que si $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene $\exp(\alpha(a^\dagger - a)) = e^{-\alpha^2/2} \exp(\alpha a^\dagger) \exp(-\alpha a)$. Empleando el ejercicio anterior, concluye $|\alpha\rangle = \exp(-ir\widehat{p})\, |0\rangle$ donde $\alpha = r\sqrt{m\omega\hbar/2}$. En definitiva, los estados coherentes son el resultado de aplicar exponenciales del momento al estado fundamental.