

Hoja 3 (sección 1.3)

EJERCICIO 1. Explica por qué $|\alpha\rangle = \sum_j \lambda_j |j\rangle$ con $\lambda_j \in \mathbb{C}$ implica $\langle\alpha| = \sum_j \lambda_j^* \langle j|$. Explica también por qué si A y B son observables entonces $i[A, B]$ lo es mientras que $[A, B]$ no lo es, excepto cuando se anula.

EJERCICIO 2. Sean $|a\rangle$ y $|b\rangle$ dos estados ortonormales. En el espacio que generan consideramos el operador $2 + |\alpha\rangle \langle\beta|$ donde $|\alpha\rangle = -|a\rangle + (2 - i)|b\rangle$ y $|\beta\rangle = i|a\rangle + |b\rangle$. Halla sus autovalores. ¿Cambia, en general, el resultado si no son ortonormales? **Indicación:** Recuerda que en física cuántica se suelen representar los múltiplos de la identidad con números, así 2 significa 2Id .

EJERCICIO 3. Demuestra que el único observable T que cumple $\langle x|T|x\rangle = 0$ para todo $|x\rangle$ es $T = 0$. Comprueba que hay contraejemplos en espacios de Hilbert sobre $\mathbb{R}$. **Indicación:** Para la primera parte, prueba la identidad $\langle x|T|y\rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^{-k} \langle z_k|T|z_k\rangle$ con $|z_k\rangle = |x\rangle + i^k |y\rangle$. Para la segunda, considera $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual.

EJERCICIO 4. El espacio de Hilbert que modela el momento magnético del electrón en reposo es $\mathbb{C}^2$ con el producto escalar $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = v_1^* w_1 + v_2^* w_2$. Su evolución bajo un campo magnético con inducción magnética $\vec{B} \in \mathbb{R}^3$ viene dada por

$$\frac{d|\Psi\rangle}{dt} = \frac{i\gamma}{2} \left(B_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + B_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + B_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) |\Psi\rangle$$

donde γ es una constante real (la *constante giromagnética* del electrón). Identifica el operador $H(t)$ en la formulación con operadores del segundo postulado y comprueba que es autoajunto. Sabiendo que $\dim \gamma = \text{M}^{-1}\text{T}$, halla $\dim B_j$.

EJERCICIO 5. Calcula la solución general de la ecuación del ejercicio anterior cuando $B_1 = B_3 = 0$ y B_2 es constante. Si H es el operador correspondiente a esta situación, calcula $e^{-itH/\hbar}$ y utilízalo para dar una solución alternativa (si lo has hecho de otra forma).

EJERCICIO 6. Abreviemos en el pozo de potencial infinito $|n\rangle = e^{-iE_n t/\hbar} \psi_n(x)$. Imaginemos un aparato que mide la energía E dando solo tres valores: cero si $E < E_{10}$, uno si $E \in [E_{10}, E_{30})$ o dos si $E \geq E_{30}$. Al medir el estado $\frac{4}{21} |5\rangle + \frac{3}{21} |20\rangle + \frac{4}{21} |23\rangle + \frac{20}{21} |50\rangle$, ¿cuál es la probabilidad de obtener uno y en qué estado (normalizado) se transformará tras esa medición?

EJERCICIO 7. Demuestra que si A es un observable que depende explícitamente del tiempo entonces

$$\frac{d}{dt} \langle Q \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, Q] \rangle + \left\langle \frac{\partial Q}{\partial t} \right\rangle.$$

EJERCICIO 8. Comprueba la identidad $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$.

EJERCICIO 9. Comprueba $[\hat{x}^n, \hat{p}] = i\hbar n \hat{x}^{n-1}$. En general, halla $[\hat{f}, \hat{p}]$ donde f es una función arbitraria de x . Utiliza el resultado para escribir un principio de incertidumbre para los observables momento y sen $\hat{x}$.

EJERCICIO 10. Generaliza todavía más el ejercicio anterior hallando $[A^n, B]$ para cualquier par de operadores tales que $[A, B] = i\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

EJERCICIO 11. Supongamos que el espacio de Hilbert subyacente es $L^2(\mathbb{R})$ (o si lo prefieres, restringete a la clase de Schwartz). Prueba que el operador $T = e^{-i\lambda\hat{p}/\hbar}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, llamado *operador de traslación* cumple $T^\dagger \hat{x} T = \hat{x} + \lambda$. Indicación: Apelando al análisis de Fourier, es suficiente comprobar su acción sobre $\varphi(x) = e^{2\pi i \xi x}$.

EJERCICIO 12. Sea $F(t) = e^{tA} B e^{-tA}$ donde $[A, B] = c$ con c constante. Prueba que $F'(t) = c$ y deduce $F(t) = B + ct$. Utiliza este resultado para dar una solución rápida al ejercicio anterior.