Hoja 2 (sección 1.2)

EJERCICIO 1. Explica por qué $v_p = \omega/k$ indica la velocidad de avance de las crestas de la onda $u(x,t) = A\operatorname{sen}(kx - \omega t)$.

EJERCICIO 2. Muestra que si F es conservativo, esto es, $F = -\nabla V$ entonces el trabajo $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ depende de los extremos de γ pero no de la trayectoria que describe.

EJERCICIO 3. Comprueba que las dimensiones son coherentes en la ecuación de Schrödinger.

EJERCICIO 4. Para $L > 0$, supongamos una función de ondas que en un instante t_0 es de la forma $\Psi(x,t_0) = A\max(0, 1 - |x|/L)$. Calcula la probabilidad de que en dicho instante se detecte en $(-\infty, -\frac{L}{4}] \cup [\frac{L}{2}, \infty)$ la partícula que representa.

EJERCICIO 5. Comprueba que $\Psi(x,t) = e^{2\pi i\xi x - iE_\xi t/\hbar}$ con $E_\xi = 2\pi^2\hbar^2\xi^2/m$ satisface la ecuación de Schrödinger con $V = 0$ para cualquier $\xi = 0$.

EJERCICIO 6. Consideremos $\Psi(x,t) = A\,e^{-\alpha(x^2 + i\hbar t/m)}$ con $\alpha > 0$. Halla A para que esté normalizada y calcula el potencial V para que satisfaga la ecuación de Schrödinger. Nota: Dicho potencial, convenientemente escalado, tiene un papel muy destacado en física cuántica y aparecerá más tarde en el curso.

EJERCICIO 7. Demuestra el teorema de Ehrenfest en el caso tridimensional.

EJERCICIO 8. Si $\Psi_1(x,t)$ y $\Psi_2(x,t)$ son dos soluciones normalizadas de la misma ecuación de Schrödinger en una dimensión, demuestra que $\int_{\mathbb{R}} \Psi_1^*(x,t)\Psi_2(x,t)\,dx$ no depende del tiempo.

EJERCICIO 9. Expresa $\widehat{x}\widehat{H} - \widehat{H}\widehat{x}$ en términos de $\widehat{p}$.

EJERCICIO 10. Demuestra que si Ψ resuelve la ecuación de Schrödinger en una dimensión entonces $\frac{\partial}{\partial t}|\Psi|^2 = -\frac{\hbar}{m}\frac{\partial}{\partial x}\big(\Im(\Psi^*\Psi_x)\big)$ donde $\Im(z)$ indica la parte imaginaria de z y Ψ_x es la derivada parcial de Ψ.

EJERCICIO 11. Aplica el ejercicio anterior a una solución estacionaria $\Psi(x,t) = e^{-iEt/\hbar}\psi(x)$ y deduce que si el potencial se anula en ciertos intervalos I_j, se tiene $\psi(x) = A_j e^{ipx/\hbar} + B_j e^{-ipx/\hbar}$ para $x \in I_j$ con $|A_j|^2 - |B_j|^2$ independiente de j. Escribe una fórmula para p y comprueba que tiene dimensiones de momento.

EJERCICIO 12. La ecuación de Schrödinger es en parte relativista y en parte no. Vas a comprobar que las *transformaciones de Galileo* no preservan las soluciones, pero sí la probabilidad. En términos matemáticos, demuestra que dada una solución Ψ de la ecuación unidimensional, la función $\Psi'(x,t) = e^{-i(mvx + \frac{1}{2}mv^2t)/\hbar}\Psi(x+vt,t)$ con v constante (con dimensiones de velocidad), satisface la ecuación de Schrödinger cambiando $V(x)$ por $V(x+vt)$. Nota: Obviamente se cumple $|\Psi|^2 = |\Psi'|^2$, en ese sentido la probabilidad se conserva.

EJERCICIO 13. Para una función de ondas radial, $\Psi(x,y,z,t) = g(\sqrt{x^2+y^2+z^2}, t)$ que satisface la ecuación de Schrödinger halla qué ecuación debe cumplir g. Indicación: Todo lo que debes hacer es recordar o hallar cómo es el operador laplaciano en coordenadas esféricas.

Ejercicio 14. Consideremos la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo en tres dimensiones con un potencial $V(x,y,z) = V_1(x) + V_2(y) + V_3(z)$. Si ψ_j, $j = 1,2,3$, son soluciones normalizadas para el caso unidimensional con potenciales V_j y energías E_j, prueba que $\psi(x,y,z) = \psi_1(x)\psi_2(y)\psi_3(z)$ es solución normalizada del problema tridimensional para cierta energía E. Exprésala en términos de las E_j.

Ejercicio 15. Sea $\psi(x) = Axe^{-a^4x^2}$ con $A, a \in \mathbb{R}^+$ solución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para un potencial V con $V(0) = 0$. Halla $A \in \mathbb{R}^+$ para que esté normalizada y calcula V y E. ¿Qué dimensiones tienen a y A?

Ejercicio 16. Explica por qué si $\psi = \psi(x)$ es una solución normalizada de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \widehat{p}(\psi) = 0$. Indicación: Una forma de proceder, aunque no la más rápida, es recordar la relación entre $\widehat{p}$ y $\widehat{x}\widehat{H} - \widehat{H}\widehat{x}$ de un ejercicio anterior.

Ejercicio 17. En el caso de la partícula libre en la circunferencia, demuestra la conservación de la probabilidad (si $\Psi(x,0)$ está normalizada, entonces $\Psi(x,t)$ también lo está para cualquier t) utilizando la identidad de Parseval para series de Fourier. Nota: Tal identidad afirma que si f es 1-periódica $\int_0^1 |f|^2$ es la suma de los cuadrados de sus coeficientes de Fourier.

Ejercicio 18. Si un potencial es par, $V(x) = V(-x)$, demuestra que cada solución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para cierta energía es suma de una solución par y otra impar (quizá una de las dos idénticamente nula).

Ejercicio 19. Consideremos la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo en una dimensión con un potencial que cumple $V(x) > V_0$ para cierta constante V_0. Demuestra que no hay soluciones normalizables con $E < V_0$. Indicación: Comprueba la identidad $\psi''\psi = (\psi\psi')' - (\psi')^2$ o $\psi''\psi^* = (\psi^*\psi')' - |\psi'|^2$ si trabajas con números complejos.

Ejercicio 20. En el pozo de potencial infinito con $L = 1/5$, Dada la condición inicial $\Psi(x,0) = A\,\mathrm{sen}^3(5\pi x)$ halla A para que esté normalizada y obtén una fórmula explícita para $\Psi(x,t)$. ¿Cuál es la probabilidad de detectar la partícula en $x > 1/10$ en el instante $t = 20\pi^{-1}\hbar^{-1}m$?

Ejercicio 21. Sea $\Psi(x,t)$ solución de la ecuación de Schrödinger para el pozo de potencial infinito y sea $T = 4mL^2/(\pi\hbar)$. Comprueba que T tiene dimensiones de tiempo y demuestra que $\Psi(x,0) = \Psi(x,T)$ y $\Psi(x,T/4) = \frac{1-i}{2}\Psi(x,0) - \frac{1+i}{2}\Psi(L-x,0)$. Nota: Estas y otras repeticiones de las condiciones iniciales en algunos sistemas se llaman *resurgimiento cuántico* o, a veces, *efecto Talbot cuántico* por el pionero de la fotografía H. F. Talbot que observó un análogo óptico.

Ejercicio 22. Calcula las soluciones de la la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para el pozo de potencial cúbico infinito en tres dimensiones. Es decir, para $V(x,y,z) = 0$ si $x,y,z \in [0,L]$ y $V(x,y,z) = \infty$ en otro caso. Halla el número de soluciones linealmente independientes para los seis valores más pequeños de la energía. Indicación: Puedes dar por supuesto que el método de separación de variables es aplicable aquí.

Ejercicio 23. Considera el pozo de potencial finito con $L = 1$. ¿A partir de qué valor de V_0 hay solo una solución par con energía $-V_0 < E < 0$? Calcula el límite de E/V_0^2 cuando $V_0 \to 0$ y explica la paradoja de que E/V_0 sea adimensional y el resultado por V_0 no lo sea.

Ejercicio 24. En física muchas veces se usan potenciales con deltas de Dirac. Más allá de la definición matemática que quizá conozcas, intuitivamente la *delta de Dirac* $\delta = \delta(x)$ se entiende como la derivada de H donde $H(x) = 0$ en $x < 0$ y $H(x) = 1$ en $x > 0$, de modo que $\int_I \delta = 1$ para cualquier intervalo $0 \in I$. Con esta información, determina las soluciones normalizables de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para $V = \alpha\delta$ con $\alpha < 0$. ¿Qué dimensiones tiene α? Indicación: En cierto modo, $\delta(x) = 0$ para $x \neq 0$ y $\delta(0) = \infty$, por tanto, $V = 0$ en $\mathbb{R} - \{0\}$. Después hay que ajustar las cosas en el origen para que ψ'' sea como la derivada de una función escalón. Salvo normalizaciones, solo hay una solución.

Ejercicio 25. Considera el potencial $V(x) = V_i(x) + V_0 L\,\delta(x - L/2)$ donde V_i corresponde al pozo de potencial infinito y δ es la delta de Dirac. Comprueba que la solución de $\widehat{H}\psi = E\psi$ con E mínima es de la forma $\psi(x) = A\operatorname{sen}(x\sqrt{2mE}/\hbar)$ en $[0, \frac{L}{2}]$ y $\psi(x) = B\operatorname{sen}((L-x)\sqrt{2mE}/\hbar)$ en $[\frac{L}{2}, L]$. Demuestra que E es la menor solución positiva de la ecuación

$$\frac{\hbar\sqrt{2E}}{LV_0\sqrt{m}} + \tan\frac{L\sqrt{mE}}{\hbar\sqrt{2}} = 0.$$