Hoja 1 (sección 1.1)

Nota: Algunos de los problemas de esta hoja se refieren a teoría no vista en clase y conviene dar una lectura rápida a los apuntes.

Ejercicio 1. La constante $\alpha = \mathrm{e}^2/(2\epsilon_0 hc)$ se llama *constante de estructura fina* y desempeña un papel fundamental en física cuántica cuando se consideran efectos relativistas. Muestra que es adimensional y calcula $\alpha^{-1} - 137$ con dos decimales. Un físico renombrado creyó en 1929 que $\alpha^{-1} \in \mathbb{N}$ y todavía hoy hay alguna numerología marginal sobre α.

Ejercicio 2. Comprueba que Rch con $R = m_\mathrm{e} K^2 \mathrm{e}^4/(4\pi c\hbar^3)$ y $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ tiene unidades de energía.

Ejercicio 3. Comprueba que en la ecuación $\dot{r}r^2 + \mathcal{K} = 0$ con $\mathcal{K} = \frac{4K^2\mathrm{e}^4}{3m_\mathrm{e}^2c^3}$ y $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ las dimensiones son coherentes.

Ejercicio 4. Resuelve la ecuación diferencial del ejercicio anterior, muestra que bajo $r(0) = R_0 > 0$ se sigue $r(t_c) = 0$ para $t_c = \frac{1}{3}\mathcal{K}^{-1}R_0^3$ y calcula el valor numérico aproximado de t_c cuando $R_0 = 5 \cdot 10^{-11}$. Según lo visto en la teoría, t_c aproxima el tiempo que tardaría en colapsar un átomo de hidrógeno según la electrodinámica clásica.

Ejercicio 5. Demuestra $\sum_{n=0}^\infty nr^n = r(1-r)^{-2}$ para $|r| < 1$ y escribe con detalle la deducción de (2).

Ejercicio 6. Es bien conocido que $\sum_{n=1}^\infty n^{-4} = \pi^4/90$. Por ejemplo, se deduce de la identidad Parseval aplicada al desarrollo de Fourier de $x^2 - \pi^2/3$ en $[-\pi, \pi]$. Dando esto por supuesto, demuestra $\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^x-1} = \frac{\pi^4}{15}$. Indicación: Expresa $(e^x - 1)^{-1}$ como la suma de una progresión geométrica.

Ejercicio 7. Escribe los detalles en la deducción de la ley de Stefan-Boltzmann con un cambio de variable.

Ejercicio 8. Comprueba que (3) se sigue al combinar la condición de cuantización con (1).

Ejercicio 9. Vamos a reproducir un cálculo que hizo Stefan para estimar la temperatura de la superficie del Sol. La energía por unidad de tiempo y superficie que nos llega a la Tierra desde el Sol es $P_T = 1367\,J\,m^{-2}\,s^{-1}$. Explica por qué P en la superficie del Sol debería ser $P = \frac{4\pi d^2}{4\pi R^2}P_T$ donde d es la distancia de la Tierra al Sol y R es el radio del Sol. Busca estos dos valores, sustituye en la ley de Stefan-Boltzmann y deduce la temperatura de la superficie del Sol.

Ejercicio 10. La superficie de la Tierra es calentada por el Sol y para estar en equilibrio térmico todo debería funcionar como si fuera su temperatura la que genera el calor que la circunda. Con la notación del problema anterior, trata de justificar por qué es natural suponer que la energía por unidad de área y de tiempo es $\frac{\pi r^2}{4\pi r^2}P_T$ con r el radio de la Tierra. Suponiendo en primera aproximación que se comporta como un cuerpo negro, deduce la temperatura (media) en kelvin de su superficie con la ley de Stefan-Boltzmann. Indicación: Nota que P_T solo llega a la mitad de la Tierra en que es de día.