

Entrelazamiento

Seminario: Introducción a la física cuántica segundo semestre 2025–2026

Fernando Chamizo <https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/>

El hecho de que la mecánica de una partícula cuántica se represente con una función de ondas, permite que esté, en cierto modo, en dos sitios al mismo tiempo porque las probabilidades de detectarla en dos intervalos distintos son típicamente no nulas. Cuando se consideran varias partículas, hay otro fenómeno chocante que Schrödinger consideró fundamental y es que resulta imposible en algunas situaciones separar el estado de unas partículas del de otras lo que lleva a la paradoja de que aparentemente hay una misteriosa acción a distancia cuando el estado de una de ellas colapsa tras una medición.

2.1. Producto tensorial

La presentación moderna de las matemáticas con su énfasis en el rigor y la síntesis a menudo tiene que pagar el peaje de la falta de motivación y una sensación de hermetismo. Esta situación se muestra especialmente en la definición de las estructuras algebraicas. Por ejemplo, seguramente en primero te amedrentó la definición de espacio vectorial como una lista de propiedades aparentemente arbitrarias (en las que nadie piensa al imaginar un espacio vectorial). En este sentido, la física es más amable porque las matemáticas se emplean como una herramienta. A pesar de que la física teórica contemporánea está tomando una deriva muy abstracta, siempre habrá voces críticas, con razón o sin ella, que sirvan de contrapeso (como la reacción al uso de grupos de Lie, denostado como *Gruppenpest* en los inicios de la mecánica cuántica).

Sirva el párrafo anterior para justificar dar solo una definición aproximada no rigurosa de la estructura algebraica que vamos a emplear: el *producto tensorial* (si te quieres asustar, mira [6, §IV.5]). Ya comentamos algo acerca de su motivación a raíz del Postulado 4 en términos de funciones de onda. Ahora nos centraremos en el producto tensorial de dos espacios vectoriales V y W sobre \mathbb{C} de dimensión finita, que se indica con $V \otimes W$. En pocas palabras, $V \otimes W$ es el espacio vectorial generado por expresiones formales $\vec{v} \otimes \vec{w}$ con $\vec{v} \in V$, $\vec{w} \in W$ donde se supone que la operación \otimes es bilineal en ambos argumentos y verifica la propiedad distributiva, es decir,

$$(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) \otimes (\mu_1 \vec{w}_1 + \mu_2 \vec{w}_2) = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \lambda_j \mu_k \vec{v}_j \otimes \vec{w}_k.$$

En particular $\vec{0} \otimes \vec{w}$ y $\vec{v} \otimes \vec{0}$ son ambos $0 \vec{v} \otimes \vec{w}$ que es el vector nulo en $V \otimes W$ (porque siempre se obtiene este al multiplicar por cero en un espacio vectorial). Si $\{\vec{v}_j\}_{j=1}^n$ y $\{\vec{w}_k\}_{k=1}^m$ son bases de V y W , todos los elementos de $V \otimes W$ son combinaciones lineales de $\vec{v}_j \otimes \vec{w}_k$ y se tiene $\dim(V \otimes W) = \dim V \dim W$.

En el Postulado 4 ya se mencionó que había una relación entre el producto tensorial y que la probabilidad venga dada por el producto de las probabilidades asociadas a componentes independientes. Ejercemos de matemáticos rodeando de un contexto abstracto a esta relación a través de uno de los conceptos duros de primero: el *espacio dual*. De hecho vamos a considerar algo más raro que se podría llamar espacio anti-dual, el conjugado del dual, formado por aplicaciones que satisfacen $f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$ y $f(\lambda\vec{v}) = \lambda^* f(\vec{v})$. Llamando V^\times a este espacio se tiene un isomorfismo $V^\times \otimes W^\times \cong (V \otimes W)^\times$ que asigna a cada $f \otimes g$ la aplicación que envía $\vec{v} \otimes \vec{w}$ a $f(\vec{v})g(\vec{w})$ (esto es un ejercicio si te gustan las estructuras algebraicas). Por otro lado, si en V existe un producto escalar, $\vec{v} \mapsto \langle \vec{v} | \cdot \rangle$ establece un isomorfismo $V \cong V^\times$ (en análisis funcional esta es una formulación del *teorema de representación de Riesz*). De este modo, productos escalares $\langle \cdot | \cdot \rangle_V$ y $\langle \cdot | \cdot \rangle_W$ en V y W dan lugar a un producto escalar natural en $V \otimes W$ definido por

$$(1) \quad \langle \vec{v}_1 \otimes \vec{w}_1 | \vec{v}_2 \otimes \vec{w}_2 \rangle = \langle \vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle_V \langle \vec{w}_1 | \vec{w}_2 \rangle_W.$$

Si S y T son operadores lineales que actúan, respectivamente, en V y W , se define su *producto tensorial* $S \otimes T$ como el operador

$$S \otimes T : V \otimes W \longrightarrow V \otimes W \quad \text{que actúa como} \quad (S \otimes T)(\vec{v} \otimes \vec{w}) = (S\vec{v}) \otimes (T\vec{w}).$$

Es evidente que la composición (producto) de operadores de este tipo se opera factor a factor:

$$(S \otimes T)(S' \otimes T') = (SS') \otimes (TT').$$

Se cumple $(S \otimes T)^\dagger = S^\dagger \otimes T^\dagger$ y, por tanto, si S y T son observables en V y W , entonces $S \otimes T$ lo es en $V \otimes W$.

Después de estas concesiones a la abstracción, veamos que el producto tensorial admite una interpretación más prosaica en nuestro contexto al trabajar con coordenadas. Todos los espacios vectoriales sobre \mathbb{C} de dimensión n son isomorfos a \mathbb{C}^n . Como $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ tiene dimensión mn , debe ser isomorfo a \mathbb{C}^{mn} . Tal isomorfismo se puede realizar con

$$\Phi : \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{mn} \quad \text{dado por} \quad \Phi \left(\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right) \right) = \begin{pmatrix} v_1 w_1 \\ v_1 w_2 \\ \vdots \\ v_m w_{n-1} \\ v_m w_n \end{pmatrix}.$$

Diremos que Φ es el *isomorfismo lexicográfico* (el nombre no es convencional) porque los pares de índices en el último vector aparecen con este orden. Este isomorfismo preserva el producto escalar usual indicado con un punto en la siguiente fórmula:

$$\Phi(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \Phi(\vec{v} \otimes \vec{w}) = (\vec{a} \cdot \vec{v})(\vec{b} \cdot \vec{w}).$$

Otra forma de ver Φ es considerar la *base lexicográfica* $\{\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1, \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m \otimes \vec{e}_{n-1}, \vec{e}_m \otimes \vec{e}_n\}$ en $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ donde \vec{e}_j son los vectores de la base canónica en cada espacio¹ (de nuevo, la

¹Nótese el abuso de notación. Por ejemplo, al escribir $\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$ el primer \vec{e}_2 es $(0, 1)^t$ y el segundo es $(0, 1, 0)^t$.

llamamos así por el orden de los pares de índices). Lo único que hace Φ es enviar el ℓ -ésimo elemento de esta base a \vec{e}_ℓ . Concretamente, $\Phi(\vec{e}_j \otimes \vec{e}_k) = \vec{e}_{(j-1)n+k}$.

El producto tensorial de operadores en $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ también admite una expresión tangible al emplear la base lexicográfica. Si $S : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ y $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ tienen matrices A y B en las respectivas bases canónicas de \mathbb{C}^m y \mathbb{C}^n , entonces la matriz de $S \otimes T$ en la base lexicográfica, representada como matriz por bloques, es:

$$\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mm}B \end{pmatrix}.$$

Se dice que este es *producto de Kronecker* de las matrices y a menudo se sobrecarga la notación indicándolo con $A \otimes B$, incluso algunos autores lo llaman *producto tensorial* de matrices (lo cual es históricamente más justo pues L. Kronecker no fue quien lo introdujo). Es fácil comprobar que el elemento $k\ell$ de $A \otimes B$ es $a_{q_k+1, Q_\ell+1} b_{r_k+1, R_\ell+1}$ donde (q_k, r_k) y (Q_ℓ, R_ℓ) son los pares cociente-resto al dividir $k-1$ y $\ell-1$ por m y n . El producto de Kronecker se define también para matrices no cuadradas, pero no lo consideraremos aquí.

En el lado físico, el espacio de Hilbert para representar el espín es de dimensión 2 y habíamos destacado la base ortonormal $\{|z+\rangle, |z-\rangle\}$. Al identificarla con la base canónica de \mathbb{C}^2 , el espacio es simplemente \mathbb{C}^2 con el producto escalar usual. Un matemático podría considerar que $a|z+\rangle + b|z-\rangle$ es una notación cursi que tienen los físicos para escribir el vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de toda la vida.

Según el Postulado 4, $\mathbb{C}^2 \otimes \overset{N \text{ veces}}{\dots} \otimes \mathbb{C}^2$, que es isomorfo a \mathbb{C}^{2^N} , es el espacio de Hilbert adecuado para estudiar sistemas cuánticos formados por N partículas con espín. Si no añadimos propiedades mecánicas, diremos que estos sistemas son *sistemas de espín*. En este contexto, el producto tensorial simplemente separa lo que ocurre con cada partícula. Por ejemplo, el vector $|z+\rangle \otimes |z-\rangle$ indica que la primera partícula tiene espín arriba y la segunda espín abajo. Por otro lado, $|z+\rangle \otimes |z-\rangle + 5|z-\rangle \otimes |z+\rangle$ indica algo más complicado, la primera partícula tiene espín arriba o espín abajo, pero la segunda necesariamente tiene el contrario (esto tiene que ver con el entrelazamiento que veremos después). Además, la distribución entre estas dos opciones no es equitativa, hay $5^2 = 25$ veces más posibilidades de detectar la primera partícula con espín abajo y la segunda con espín arriba que la configuración contraria.

Sería muy gravoso escribir continuamente productos $|z\pm\rangle \otimes |z\pm\rangle \otimes \dots \otimes |z\pm\rangle$. Hay varias taquigrafías al uso. La que emplearemos aquí es sustituir una expresión de este tipo por la secuencia ordenada de signos dentro de un *bra*. Por ejemplo,

$$|+-\rangle = |z+\rangle \otimes |z-\rangle \quad \text{y} \quad |+- -+\rangle = |z+\rangle \otimes |z-\rangle \otimes |z-\rangle \otimes |z+\rangle.$$

Por supuesto, el producto tensorial no es conmutativo, solo asociativo. Si quisiéramos escribir el primer ejemplo en \mathbb{C}^4 con el isomorfismo lexicográfico, se tendría

$$|+-\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\Phi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{mientras que} \quad |-+\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\Phi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El segundo ejemplo daría lugar a un vector en \mathbb{C}^{16} , de sus 16 coordenadas la única no nula es un uno en el séptimo lugar. Es muy inusual describir estados en un sistema de espín a través de Φ porque se pierde la intuición física y habitualmente uno debería emplear vectores de alta dimensión con muchas coordenadas nulas, lo cual es poco económico.

Con la notación anterior, los productos escalares en sistemas de espín son bastante triviales, pues un vector correspondiente a una lista de signos es ortogonal a otro con una lista distinta. Por ejemplo,

$$\left. \begin{array}{l} |\psi_0\rangle = |++\rangle - i| -+\rangle \\ |\psi_1\rangle = |+-\rangle + 2| -+\rangle \end{array} \right\} \implies \langle \psi_0 | \psi_1 \rangle = \begin{aligned} & \langle ++ | +-\rangle + 2\langle ++ | -+\rangle \\ & + i\langle -+ | +-\rangle + 2i\langle -+ | -+\rangle, \\ & = 0 + 2 \cdot 0 + i \cdot 0 + 2i \cdot 1 = 2i. \end{aligned}$$

Del mismo modo, en los sistemas de espín el producto tensorial de operadores físicamente significa, de manera intuitiva, hacer algo a cada una de las partículas por separado. Por ejemplo, aplicar $S_1 \otimes 1$ significa aplicar el operador de espín en la dirección x a la primera partícula y no hacer nada a la segunda. Sabemos que $S_1 |+\rangle = \frac{\hbar}{2} |-\rangle$ y $S_1 |-\rangle = \frac{\hbar}{2} |+\rangle$, así pues, para los vectores $|\psi_0\rangle$ y $|\psi_1\rangle$ del ejemplo anterior

$$(S_1 \otimes 1) |\psi_0\rangle = \frac{\hbar}{2} | -+\rangle - i\frac{\hbar}{2} | ++\rangle \quad \text{y} \quad (S_1 \otimes 1) |\psi_1\rangle = \frac{\hbar}{2} | --\rangle + \hbar | ++\rangle.$$

También tendríamos $(S_1 \otimes S_1) |\psi_1\rangle = \frac{\hbar^2}{4} | -+\rangle + \frac{\hbar^2}{2} | +- \rangle$.

2.2. Estados producto y entrelazados

Los elementos de $V \otimes W$ de la forma $\vec{v} \otimes \vec{w}$ con $\vec{v} \in V$ y $\vec{w} \in W$, son una excepción, la gran mayoría de los elementos no se pueden escribir así sino como una combinación lineal de productos tensoriales. Si V y W son espacios de Hilbert que representan dos componentes de un sistema cuántico, los estados que corresponden a vectores $\vec{v} \otimes \vec{w}$ se dice que son *estados producto* mientras que el resto se dice que son *estados entrelazados*. Por ejemplo, el estado que corresponde al vector normalizado $\frac{i}{2} | ++\rangle - \frac{i}{2} | +- \rangle + \frac{1}{2} | -+\rangle - \frac{1}{2} | --\rangle$ es un estado producto porque

$$\frac{i}{2} | ++\rangle - \frac{i}{2} | +- \rangle + \frac{1}{2} | -+\rangle - \frac{1}{2} | --\rangle = \left(\frac{i}{\sqrt{2}} | +\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} | -\rangle \right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} | +\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} | -\rangle \right).$$

Por otro parte, es fácil convencerse de que $\frac{1}{\sqrt{2}} | ++\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} | --\rangle$ corresponde a un estado entrelazado. Enseguida veremos un algoritmo sencillo que lo corrobora.

Fue Schrödinger quien introdujo en [10] (el artículo donde aparece su famoso gato) el término *entrelazamiento* (*Verschränkung* en el original alemán). En un artículo posterior [11] escribió que no es una característica más de la mecánica cuántica, sino la que la desvía de las líneas clásicas de pensamiento.

Lo que tiene de particular el que un estado esté entrelazado o no es el efecto sobre lo que se llaman *mediciones parciales*, las que afectan solo a una componente del sistema. El producto escalar definido como (1) en $V \otimes W$ separa probabilidades, pero al reemplazar $\vec{v}_j \otimes \vec{w}_j$ por combinaciones lineales de expresiones de ese tipo es como si la independencia entre los sucesos

se rompiera. Por ejemplo, dado un vector normalizado $(\alpha|+\rangle + \beta|-\rangle) \otimes |\psi\rangle$ con $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$ normalizado, al medir la primera partícula con una máquina SGz y no tocar la segunda se obtiene $|+\rangle \otimes |\psi\rangle$ con probabilidad $|\alpha|^2$ y $|-\rangle \otimes |\psi\rangle$ con probabilidad $|\beta|^2$. Con el lenguaje del Postulado 3 usamos las proyecciones $P_+ = |+\rangle\langle+| \otimes 1$ $P_- = |-\rangle\langle-| \otimes 1$. De esta forma el estado de la segunda partícula se preserva independientemente de la primera. Sin embargo, para $\alpha|++\rangle + \beta|--\rangle$, que corresponde a un estado entrelazado, tras la medición el resultado es $|++\rangle$ con probabilidad $|\alpha|^2$ y $|--\rangle$ con probabilidad $|\beta|^2$. Al medir la primera partícula la segunda colapsa al estado de la primera. A pesar de que la segunda partícula no tenía un estado de espín definido en la dirección z lo adquiere a través de una medición de otra parte del sistema.

Sean $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ y $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$ bases de V y W que escogemos ortonormales (aunque no es estrictamente necesario). Entonces cualquier $|\psi\rangle \in V \otimes W$ se escribe como

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk} \vec{v}_j \otimes \vec{w}_k.$$

El vector $|\psi\rangle$ corresponde a un estado producto si y solo si

$$|\psi\rangle = \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j \vec{v}_j \right) \left(\sum_{k=1}^n \mu_k \vec{w}_k \right) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \lambda_j \mu_k \vec{v}_j \otimes \vec{w}_k.$$

La igualdad $a_{jk} = \lambda_j \mu_k$ significa que la matriz $A = (a_{jk})_{j,k=1}^{m,n}$ tiene todas sus filas proporcionales, esto es, rango uno. En otras palabras, $|\psi\rangle$ corresponde a un estado entrelazado si y solo si $\text{rg}(A) > 1$. En el caso $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ se deduce que

$$(2) \quad a_{11}|++\rangle + a_{12}|+-\rangle + a_{21}|-+\rangle + a_{22}|--\rangle$$

corresponde a un estado entrelazado si y solo si $\det(A) \neq 0$.

Revisitando el ejemplo que abre este apartado,

$$\begin{vmatrix} i/2 & -i/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = 0 \implies \frac{i}{2}|++\rangle - \frac{i}{2}|+-\rangle + \frac{1}{2}|-+\rangle - \frac{1}{2}|--\rangle \rightarrow \text{estado producto.}$$

El hecho de que la primera fila de la matriz sea i veces la segunda justifica que hay una factorización del tipo $(i|+\rangle + |-\rangle) \otimes (\frac{1}{2}|+\rangle - \frac{1}{2}|-\rangle)$ que, tras normalizar, da lugar a la que habíamos escrito.

Un comentario al margen es que la *descomposición en valores singulares* permite dar una expresión “mínima” de un estado entrelazado en términos de estados producto ortonormales. Recordemos que dicha descomposición permite hallar matrices unitarias U_m y \tilde{U}_n , donde los subíndices indican la dimensión, tales que

$$A = U_m R \tilde{U}_n^\dagger \quad \text{con } R \text{ rectangular diagonal } m \times n \text{ y } r_{jj} \geq 0.$$

Una *matriz rectangular diagonal* es la generalización obvia de las matrices diagonales sin exigir que sean cuadradas, esto es, $r_{jk} = 0$ para $j \neq k$. Con ello se obtiene $|\psi\rangle = \sum_j r_{jj} \vec{b}_j \otimes \vec{c}_j$

donde las coordenadas de \vec{b}_j vienen dadas por la j -ésima columna de U_m y las de \vec{c}_j por la de \tilde{U}_n conjugada. Si solo un r_{jj} es no nulo (lo que corresponde al caso de rango 1) entonces evidentemente se tiene un estado producto. En cualquier caso, los $\vec{b}_j \otimes \vec{c}_j$ son ortonormales.

Después de la lexicográfica, la base más importante de $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ en lo relativo a sistemas de espín es la base $\mathcal{B} = \{|\Phi_0\rangle, |\Phi_1\rangle, |\Phi_2\rangle, |\Phi_3\rangle\}$ formada por los llamados *estados de Bell* (más propio sería llamarlos vectores de Bell) definidos como

$$|\Phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle + |--\rangle) \quad \text{y} \quad |\Phi_j\rangle = (1 \otimes \sigma_j)|\Phi_0\rangle \quad \text{para } j = 1, 2, 3.$$

Algunos autores (por ejemplo, [9]) utilizan normalizaciones u ordenaciones diferentes. De $\sigma_j^\dagger \sigma_j = \sigma_j^2 = 1$ se deduce que los $|\Phi_j\rangle$ están normalizados. Es también bastante fácil comprobar $\langle \Phi_0 | \Phi_j \rangle = 0$. Por otro lado, si $\{j, k, \ell\} = \{1, 2, 3\}$

$$\langle \Phi_j | \Phi_k \rangle = \langle \Phi_0 | (1 \otimes \sigma_j)(1 \otimes \sigma_k) | \Phi_0 \rangle = \pm i \langle \Phi_0 | (1 \otimes \sigma_\ell) | \Phi_0 \rangle = \pm i \langle \Phi_0 | \Phi_\ell \rangle = 0.$$

Así, sin apenas cuentas, hemos probado que \mathcal{B} es una base ortonormal. Podríamos también haber razonado a partir de las expresiones explícitas de los elementos de esta base. La de $|\Phi_0\rangle$ ya la hemos escrito y las del resto son:

$$|\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle), \quad |\Phi_2\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle), \quad |\Phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle - |--\rangle).$$

Con la notación de (2) se tiene que para los estados de Bell la matriz A es la identidad o una matriz de Pauli. Usando que son no singulares, el criterio antes establecido implica que los estados de Bell están entrelazados, lo cual establece una diferencia fundamental entre \mathcal{B} y la base lexicográfica que es relevante en algunas aplicaciones.

2.3. La desigualdad de Bell

Los estados entrelazados no son una entelequia. Hay desintegraciones de partículas subatómicas que dan lugar a dos partículas de espines opuestos y, por ciertas leyes de conservación asociadas al momento angular, permiten preparar un estado $|\Phi_2\rangle$.

Ya sabemos lo que ocurre al hacer una medición parcial, solo de la primera partícula, a través de las proyecciones $P_+ = |+\rangle\langle +| \otimes 1$ y $P_- = |-\rangle\langle -| \otimes 1$. Según el tercer postulado tras la medición se obtendrá

$$|\Phi_2\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle) \quad \begin{array}{l} \boxed{\text{medición}} \\ P_+, P_- \end{array} \begin{array}{l} \swarrow |+-\rangle \quad \text{con probab. } 1/2 \\ \searrow |-+\rangle \quad \text{con probab. } 1/2 \end{array}$$

En principio nada impide que las partículas se alejen mucho después de la desintegración y antes de la medición (en realidad sí hay cierta dificultad práctica con el esquema descrito por la típica vida media corta de las partículas que podrían participar en la desintegración, pero

obviémosla). Digamos que una partícula está en casa y otra en la universidad. La medición que hagamos de la primera partícula, la que está en casa, provoca que esta colapse a un estado definido $|+\rangle$ o $|-\rangle$ con cierta probabilidad. Ya conocemos que esta es la parte rara de la mecánica cuántica (la interpretación de Copenhague), pues antes de medir la partícula solo estaba medio en $|+\rangle$ medio en $|-\rangle$, pero el entrelazamiento ha causado algo más raro aún: el colapso del estado de una partícula que está muy lejos con la que no observaríamos ninguna interacción mecánica. Actualmente se han conseguido entrelazamientos en longitudes de más de 200 *km*, por tanto, no estamos hablando de distancias fuera de la escala humana. Esta falta de localidad que parece absurda en una teoría física es lo que se llama *paradoja EPR* por un famoso artículo de Einstein, B. Podolsky y N. Rosen [4] en el que criticaron la mecánica cuántica. Si uno es puntilloso con la historia, mucho de lo que se dice habitualmente acerca de este artículo (de solo 4 páginas) es falso y responde a nuestra visión actual del problema que procede de D. Bohm, de J. Bell y de otros autores².

El artículo pretende demostrar que las funciones de onda no pueden dar una descripción de la “realidad física” que los autores definen como

If, without in any way disturbing a system, we can predict with certainty (i.e., with probability equal to unity) the value of a physical quantity, then there exists an element of physical reality corresponding to this physical quantity.

Y afirman

In quantum mechanics it is usually assumed that the wave function does contain a complete description of the physical reality of the system in the state to which it corresponds. [...] We shall show, however, that this assumption, together with the criterion of reality given above, leads to a contradiction.

En la prueba dan por supuesto que hay localidad, que el entrelazamiento a distancia no tiene sentido:

On the other hand, since at the time of measurement the two systems no longer interact, no real change can take place in the second system in consequence of anything that may be done to the first system. This is, of course, merely a statement of what is meant by the absence of an interaction between the two systems.

Volvamos al experimento con espines. Podemos negar la existencia de entrelazamiento entre partículas lejanas apelando a una falta de información. Si me dejo un guante en casa y veo en clase que sólo tengo el de la mano derecha, es que en casa está el de la izquierda. Decir que mientras no conocía la situación los guantes estaban en un estado superpuesto entrelazado y colapsan a un guante definido cuando veo el guante derecho es complicar las cosas de manera absurda (ese es el tipo de absurdo que ilustró Schrödinger en [10] con un gato superpuesto entre vivo y muerto). De la misma forma, si una partícula se ha desintegrado en una de espín

²Por ejemplo, en él no se menciona el espín y la frase de Einstein “acciones fantasmagóricas a distancia” es años anterior y no está en [4]. Para un lector actual el artículo es demasiado filosófico. Einstein criticó en privado la redacción de Podolsky por considerar que divagaba y un año después en un artículo generalista incluyó la misma información científica en pocas líneas (quizá influya que parece que le retiró la palabra a Podolsky por unas declaraciones que hizo sobre el artículo).

+ y en otra de espín $-$, y me llevo una a clase y dejo otra en casa, sabiendo el espín de una, sabré el de la otra.

A causa del Postulado 3, el único indicio práctico que tenemos de que hemos preparado un estado entrelazado como $|\Phi_2\rangle$ es que al medir muchas veces este estado en pares de partículas la mitad de ellas obtenemos $|+-\rangle$ y la otra mitad $|-+\rangle$. Pero tal situación es trivial de simular si estamos trabajando con una colección de pares de partículas sin entrelazar tal que la mitad son $|+-\rangle$ y la otra mitad $|-+\rangle$. El problema de fondo es que la física cuántica experimentalmente solo da resultados estadísticos y quizá haya características individuales que estamos obviando que conduzcan a lo mismo (por ello en [4] se concluye que la mecánica cuántica es incompleta). Estas hipotéticas características se llaman *variables ocultas*. En nuestro ejemplo, aunque la teoría diga que hemos preparado muchos $|\Phi_2\rangle$ quizá haya unas propiedades físicas desconocidas que no estamos teniendo en cuenta que hacen que en la desintegración de la partícula la mitad de las veces se creen pares $|+-\rangle$ y la otra mitad $|-+\rangle$.

Física cuántica	Variables ocultas
Estado entrelazado $\frac{i}{\sqrt{2}}(+-\rangle - -+\rangle)$ medición $\rightarrow +-\rangle, -+\rangle$ con prob. $\frac{1}{2}$	o bien $ +-\rangle$ o bien $ -+\rangle$ antes y después de medir proporciones $\frac{1}{2}$ por razones desconocidas

Esto parece imposible de refutar. ¿Cómo vamos a demostrar que no existen propiedades físicas desconocidas que se pueden integrar en la física clásica y de forma que la cuántica solo sea una aproximación estadística? Justamente la estadística se olvida de las propiedades individuales. Pues curiosamente Bell en 1964 ideó un ingenioso experimento [3], en principio mental, para comprobar este extremo, y años más tarde se consiguió hacer una versión real de tal experimento con un resultado contrario a las variables ocultas en ciertos términos generales. Hoy en día entendemos la gran relevancia de esta limitación severa de alternativas a la física cuántica que se han reflejado en un reciente premio Nobel compartido entre algunos de los que desarrollaron los experimentos³.

Lo importante es hacer varias mediciones del espín, concretamente al menos tres. En vez de seguir el argumento original de [3], utilizaremos un razonamiento elemental, prácticamente combinatorio que parece deberse a Mermin [7], el físico que resumió la interpretación de Copenhague en “*Shut up and calculate!*”.

Una observación previa es que para cualquier dirección $\vec{n} \in S^2$ se cumple

$$(3) \quad |\Phi_2\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|\vec{n}+\rangle \otimes |\vec{n}-\rangle - |\vec{n}-\rangle \otimes |\vec{n}+\rangle).$$

La prueba se reduce a recordar las fórmulas

$$|\vec{n}+\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |-\rangle \quad \text{y} \quad |\vec{n}-\rangle = -e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |+\rangle + \cos \frac{\theta}{2} |-\rangle.$$

³De nuevo, la historia es más enrevesada de lo que se cuenta y se falsea con nuestra visión actual. El influyente libro de von Neumann [12], de 1932, ya incluía una “prueba” matemática de la ausencia de variables ocultas que no fue criticada hasta años después [8]. Por otro lado, el artículo de Bell que se presenta como el ataque final a la paradoja que toda la comunidad esperaba, apenas recibió atención inicialmente.

donde φ y θ son las coordenadas esféricas de \vec{n} . Esto implica que en cualquier dirección en la que midamos $|\Phi_2\rangle$ siempre obtendremos con probabilidad $\frac{1}{2}$ cada uno de los dos posibles resultados del espín.

Supongamos ahora que hay ciertas propiedades físicas desconocidas que hacen que cada una de las dos partículas tenga unos valores determinados del espín en las direcciones \vec{n}_1 , \vec{n}_2 y \vec{n}_3 independientes de la medición y previos a ella. Llamemos $p_{k\ell}$ a la probabilidad de que la primer partícula tenga espín correspondiente a $|\vec{n}_k+\rangle$ y la segunda a $|\vec{n}_\ell+\rangle$.

Dado un conjunto muy grande de parejas de partículas denotemos con f_{+++} a la frecuencia relativa de los pares en los que la primera partícula tiene espín $+$ en las tres direcciones y definamos frecuencias relativas similares para las otras combinaciones de signos, siempre referidas a la primera partícula. Por ser cantidades no negativas, se cumple:

$$(f_{++-} + f_{+--}) \leq (f_{+-+} + f_{+--}) + (f_{++-} + f_{-+-}).$$

Cuando el número de partículas es muy grande, el primer paréntesis aproxima la probabilidad de que el espín sea $+$ en la dirección \vec{n}_1 y $-$ en la \vec{n}_3 para la primera partícula, pero esto último es lo mismo que decir que la segunda partícula tiene espín $+$ en la dirección \vec{n}_3 . En resumen, el primer paréntesis aproxima p_{13} . Identificando de la misma forma los otros dos paréntesis, se tiene

$$(4) \quad p_{13} \leq p_{12} + p_{23}.$$

Este es un ejemplo de *desigualdad de Bell*, aunque no la original ni la más conocida.

La física cuántica nos da una manera de calcular estas probabilidades. Si para algún ejemplo encontramos una violación de (4) tendremos que desechar la idea de las propiedades físicas desconocidas introducidas para negar el entrelazamiento. Consideremos los vectores

$$\vec{n}_1 = (0, 0, 1)^t, \quad \vec{n}_2 = (\sqrt{3}/2, 0, 1/2)^t \quad \text{y} \quad \vec{n}_3 = (\sqrt{3}/2, 0, -1/2)^t.$$

La primera es la dirección habitual del eje Z positivo y las otras consisten en girarla $\pi/3$ y $2\pi/3$ alrededor del eje OY . En la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, los estados con espín positivo corresponden a

$$|\vec{n}_1+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\vec{n}_2+\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad |\vec{n}_3+\rangle = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

y los de espín negativo a

$$|\vec{n}_1-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\vec{n}_2-\rangle = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \quad |\vec{n}_3-\rangle = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Considerando (3) con $\vec{n} = \vec{n}_1$ y calculando el producto escalar con $|\vec{n}_1+\rangle \otimes |\vec{n}_2+\rangle$ se obtiene

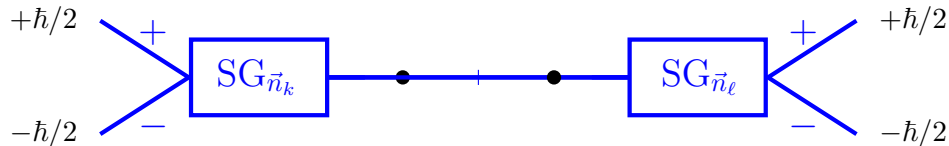
$$p_{12} = \left| \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot 1 \cdot \langle \vec{n}_2 + | \vec{n}_1 - \rangle \right|^2 = \frac{1}{8}.$$

De la misma forma,

$$p_{13} = \left| \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot 1 \cdot \langle \vec{n}_3 + | \vec{n}_1 - \rangle \right|^2 = \frac{3}{8} \quad \text{y} \quad p_{23} = \left| \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot 1 \cdot \langle \vec{n}_3 + | \vec{n}_2 - \rangle \right|^2 = \frac{1}{8}.$$

Aunque no usaremos el resto de los $p_{k\ell}$, es fácil ver que la simetría $p_{k\ell} = p_{\ell k}$ y $p_{kk} = 0$ permite hallarlos sin ningún cálculo. Evidentemente, $\frac{3}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ es una negación flagrante de la desigualdad de Bell (4).

Sobre el papel el experimento para descartar (4) es tan simple como usar muchas veces dos máquinas de Stern-Gerlach con los \vec{n}_j del contraejemplo:



Sin embargo, a menudo los experimentos famosos de la mecánica cuántica son más mentales que reales. El primer experimento de la violación de una versión de la desigualdad de Bell fue realizado en 1972 por J. Clauser y S. Freedman [5] (hay un esquema en [2, §16.5.1]), aunque se considera el liderado por A. Aspect en 1982 el definitivo [1]. En ambos, en lugar del espín se utilizó la polarización de los fotones, que tiene un comportamiento cuántico similar.

Bell razonó en [3] utilizando funciones de densidad. Normalizando los resultados del espín como 1 y -1 definió $P(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ con la media de los productos de los espines medidos en la primera partícula en la dirección \vec{n}_1 y en la segunda partícula en la dirección \vec{n}_2 . La desigualdad que obtuvo fue

$$|P(\vec{n}_1, \vec{n}_2) - P(\vec{n}_1, \vec{n}_3)| \leq 1 + P(\vec{n}_2, \vec{n}_3)$$

cualesquiera que fueran los vectores unitarios \vec{n}_j . A menudo el nombre de *desigualdad de Bell* o *teorema de Bell* (curioso nombre para algo falso) se refiere a esta fórmula. Si tienes interés en la deducción, el artículo original de Bell [3] es bastante legible y en [2, §16.4] hay una explicación más breve y moderna así como algunas extensiones posteriores.

Ejercicios de la sección 2

EJERCICIO 1. Explica por qué el isomorfismo lexicográfico entre $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ y \mathbb{C}^{mn} satisface $\Phi(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \Phi(\vec{v} \otimes \vec{w}) = (\vec{a} \cdot \vec{v})(\vec{b} \cdot \vec{w})$ donde “ \cdot ” indica el producto escalar (complejo) usual. Explica también la igualdad $\Phi(\vec{e}_j \otimes \vec{e}_k) = \vec{e}_{(j-1)n+k}$ donde \vec{e}_j son los vectores de la base canónica en cada espacio.

EJERCICIO 2. Calcula las matrices en la base $\{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$ de $S_3 \otimes S_2$ y $S_1 \otimes S_3$ con S_j los operadores de espín. Halla también el efecto del producto (la composición) de estos dos operadores sobre $|y+\rangle \otimes |x-\rangle$.

EJERCICIO 3. Consideremos un operador de rotación $R = R_{\vec{u}}(\alpha)$ y el vector normalizado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+-\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-+\rangle$. Demuestra que sean cuales sean \vec{u} y α se cumple que $(R \otimes R)|\psi\rangle$ está normalizado y representa el mismo estado que $|\psi\rangle$. Indicación: Si $R|+\rangle = |\vec{n}+\rangle$ muestra que $R|-\rangle$ y $|\vec{n}-\rangle$ representan el mismo estado.

EJERCICIO 4. Sea $\{|1\rangle, \dots, |n\rangle\}$ una base ortonormal de \mathbb{C}^n y A una matriz compleja $n \times n$. Demuestra la fórmula $\text{Tr}(A) = \sum_{k=1}^n \langle k|A|k\rangle$ donde $\text{Tr}(A)$ es la traza de A . Para un producto de Kronecker de matrices prueba $\text{Tr}(A \otimes B) = \text{Tr}(A)\text{Tr}(B)$.

EJERCICIO 5. Consideremos los operadores $\mathcal{T}_j = S_j \otimes 1 + 1 \otimes S_j$, $j = 1, 2, 3$, en $V = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Halla una base ortonormal $\{|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle\}$ de V tal que $\mathcal{T}_j |\psi_0\rangle = 0$ para todo j y $(\mathcal{T}_1^2 + \mathcal{T}_2^2 + \mathcal{T}_3^2) |\psi_k\rangle = 2\hbar^2 |\psi_k\rangle$ para $k = 1, 2, 3$. Indicación: Halla primero $|\psi_0\rangle$ y completa la base como desees guardando la ortonormalidad. Nota: Esto es parte de una regla para sumar momentos angulares que se indica con la críptica fórmula $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = \mathbf{0} \oplus \mathbf{1}$.

EJERCICIO 6. Con la notación del ejercicio anterior, comprueba $[\mathcal{T}_1^2 + \mathcal{T}_2^2, \mathcal{T}_3] = 0$. Indicación: ¿Por qué equivale a comprobar $[\mathcal{T}_1^2 + \mathcal{T}_2^2 + \mathcal{T}_3^2, \mathcal{T}_3] = 0$?

EJERCICIO 7. Estudia si $\frac{6+3i}{20}|+++ \rangle + \frac{9+3i}{20}|+-+ \rangle + \frac{3}{20}|--+ \rangle + \frac{2i-1}{5}|++- \rangle + \frac{3i-1}{5}|+- - \rangle + \frac{i}{5}|--- \rangle$ se puede escribir como $\vec{v} \otimes \vec{w}$ con $\vec{v} \in \mathbb{C}^2$ y $\vec{w} \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ o como $\vec{a} \otimes \vec{b}$ con $\vec{a} \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ y $\vec{b} \in \mathbb{C}^2$ con $\vec{v}, \vec{w}, \vec{a}, \vec{b}$ normalizados.

EJERCICIO 8. En \mathbb{C}^2 sean $|\Psi_\alpha\rangle = \cos \alpha |+\rangle + \sin \alpha |-\rangle$, $|\Psi_\alpha^\perp\rangle = -\sin \alpha |+\rangle + \cos \alpha |-\rangle$ con $\alpha \in [0, 2\pi)$ y los operadores $P_\alpha = |\Psi_\alpha\rangle \langle \Psi_\alpha|$ y $P_\alpha^\perp = |\Psi_\alpha^\perp\rangle \langle \Psi_\alpha^\perp|$. Explica por qué $M_0 = P_\alpha \otimes 1$ y $M_1 = P_\alpha^\perp \otimes 1$ son operadores de medición en $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ de acuerdo con el Postulado 3.

EJERCICIO 9. Prueba que tras una medición correspondiente a los operadores M_0 y M_1 del ejercicio anterior el estado de Bell $|\Phi_0\rangle$ colapsa a $|\Psi_\alpha\rangle \otimes |\Psi_\alpha\rangle$ o a $|\Psi_\alpha^\perp\rangle \otimes |\Psi_\alpha^\perp\rangle$ y calcula con qué probabilidades.

EJERCICIO 10. Con la notación de los dos ejercicios anteriores, supongamos que medimos $|\Phi_0\rangle$ comprobando si la primera partícula está en el estado $|\Psi_\alpha\rangle$ y la segunda en $|\Psi_\beta\rangle$, esto es, utilizando $P_\alpha \otimes P_\beta$ como uno de los operadores de medición. Muestra que la probabilidad de que $|\Phi_0\rangle$ colapse a $|\Psi_\alpha\rangle \otimes |\Psi_\beta\rangle$ es $\frac{1}{2} \cos^2(\alpha - \beta)$.

EJERCICIO 11. Sean $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3 \in \mathbb{R}^3$ vectores unitarios distintos en el semiplano $\{x > 0, y = 0\}$ tales que \vec{n}_2 apunta en la dirección de la bisectriz del ángulo entre \vec{n}_1 y \vec{n}_3 . Demuestra que contradicen la desigualdad de Bell $p_{13} \leq p_{12} + p_{23}$ donde $p_{k\ell} = |\langle \Phi_2 | \psi_{k\ell} \rangle|^2$ con $|\psi_{k\ell}\rangle = |\vec{n}_k+\rangle \otimes |\vec{n}_\ell+\rangle$.

EJERCICIO 12. Demuestra $\exp(S \otimes 1 + 1 \otimes T) = \exp(S) \otimes \exp(T)$. Indicación: Utiliza como paso intermedio $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{n!} \binom{n}{m} S^m \otimes T^{n-m}$.

Referencias

- [1] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger. Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm gedankenexperiment: A new violation of Bell's inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, 49:91–94, Jul 1982.
- [2] G. Auletta, M. Fortunato, and Parisi. G. *Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2009.

- [3] J. Bell. On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. *Physics*, 1(3):195–200, 1964.
- [4] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys.Rev.*, 47:777–780, 1935.
- [5] S. J. Freedman and J. F. Clauser. Experimental test of local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 28:938–941, Apr 1972.
- [6] T. W. Hungerford. *Algebra*, volume 73 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980. Reprint of the 1974 original.
- [7] N. D. Mermin. Bringing home the atomic world: Quantum mysteries for anybody. *American Journal of Physics*, 49(10):940–943, 10 1981.
- [8] N. D. Mermin and R. Schack. Homer nodded: von Neumann’s surprising oversight. *Found. Phys.*, 48(9):1007–1020, 2018.
- [9] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [10] E. Schrödinger. Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik. *Naturwissenschaften*, 23(48):807–812, Nov 1935.
- [11] E. Schrödinger. Discussion of probability relations between separated systems. *Proc. Camb. Philos. Soc.*, 31:555–563, 1935.
- [12] J. von Neumann. *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2018. New edition. Translated from the German and with a preface by R. T. Beyers, Edited and with a preface by N. A. Wheeler.