

# El oscilador armónico

Seminario: Introducción a la física cuántica      segundo semestre 2025–2026

Fernando Chamizo      <https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/>

El oscilador armónico aparenta ser un ejemplo más, de los pocos en que hay una solución explícita de la ecuación de Schrödinger en una dimensión. Sin embargo, tiene una importancia enorme cuando se quiere continuar más allá de los contenidos de este curso. Desde el punto de vista matemático resulta muy elegante el procedimiento algebraico para determinar energías y estados estacionarios mediante operadores auxiliares.

## 4.1. Operadores escalera y autoestados

Para un potencial constante la fuerza es nula y tenemos el caso de la partícula libre que sabemos resolver clásicamente (movimiento rectilíneo uniforme) y cuánticamente. Si el potencial es lineal, la fuerza es constante desde el punto de vista clásico y lleva al movimiento uniformemente acelerado, mientras que en el caso cuántico aparecen unas funciones, las funciones de Airy, que son importantes para entender el método WKB, el cual proporciona soluciones aproximadas de la ecuación de Schrödinger [7]. Cuando el potencial es cuadrático y el signo es adecuado la fuerza y la energía clásicas vienen dadas por [5, §21]

$$F = -kx, \quad k > 0, \quad \text{y} \quad E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \quad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Es fácil ver que  $\dim k = \text{MT}^{-2}$  y  $\dim \omega = \text{T}^{-1}$ . El resultado es un movimiento armónico simple con frecuencia angular  $\omega$  dado por la ecuación  $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$  con  $A$  y  $\varphi_0$  constantes, la amplitud y la fase inicial, que dependen de las condiciones iniciales. El análogo cuántico lleva a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$\hat{H}\psi = E\psi \quad \text{con} \quad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2.$$

En términos matemáticos, se tiene la ecuación diferencial ordinaria

$$(1) \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi = E\psi \quad \text{donde} \quad \psi = \psi(x)$$

y queremos saber para qué valores de  $E$  hay soluciones normalizables y, en ese caso, calcularlas.

Alguien con experiencia en análisis puede reconocer que la derivada segunda de la gaussiana  $f(x) = e^{-x^2/2}$  es  $x^2f(x)$  salvo sumar un múltiplo de  $f(x)$  y usar este hecho para construir una solución de (1) con cierta energía, pero no se ve cómo generalizar esta idea y estar seguros de cubrir todas las soluciones.

La estrategia más fructífera es algebraica, basada en introducir unos operadores que pasan unas autofunciones de  $\widehat{H}$  a otras. Como ilustración, pensemos en el caso más familiar de matrices  $A$  y  $B$  en el *grupo lineal*  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  formado por las matrices no singulares  $n \times n$ . Si  $[A, B] = 0$  entonces  $B$  transforma autovectores de  $A$  en autovectores de  $A$  porque

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \implies BA\vec{v} = \lambda B\vec{v} \implies A(B\vec{v}) = \lambda B\vec{v}.$$

Esto no resulta tan interesante si recordamos el resultado de álgebra lineal que afirma que para matrices diagonalizables la conmutación implica que se diagonalizan en la misma base [3]. De esta forma, el efecto de  $B$  es bastante trivial, simplemente modificar la longitud de los vectores propios que forman la base. Para salirnos de esta situación sin interés, supongamos en su lugar  $[A, B] = cB$  con  $c \in \mathbb{C}$ . Todavía  $B$  transforma vectores propios en vectores propios porque

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \implies BA\vec{v} = \lambda B\vec{v} \implies (AB - cB)\vec{v} = \lambda B\vec{v} \implies A(B\vec{v}) = (\lambda + c)B\vec{v}.$$

Ahora  $B$  no puede actuar trivialmente, para  $c \neq 0$ , porque cambia el valor propio. Realmente  $[A, B] = cB$  no se puede cumplir para  $A, B \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  con  $c \neq 0$  porque una aplicación repetida del argumento llevaría a que todos los  $\lambda + cn$  con  $n \in \mathbb{N}$  son autovalores, lo cual es absurdo. Sin embargo, sí hay posibilidades en dimensión infinita. Justamente es esta la técnica que vamos a emplear.

Comenzamos introduciendo el *operador de destrucción* y el *operador de creación* definidos, respectivamente, como

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \widehat{x} + \frac{i\widehat{p}}{m\omega} \right) \quad \text{y} \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \widehat{x} - \frac{i\widehat{p}}{m\omega} \right).$$

Como la notación sugiere, cada uno es el adjunto del otro (esto es obvio empleando que  $\widehat{x}$  y  $\widehat{p}$  son observables, esto es, autoadjuntos). Los nombres pintorescos que reciben tiene sentido dentro de la teoría cuántica de campos (que aúna mecánica cuántica y relatividad especial) donde las partículas son excitaciones de campos y los análogos de  $a$  y  $a^\dagger$  las destruyen y las crean. Esta conexión es una de las razones por las que el oscilador armónico cuántico es tan importante. Si a esto unimos la relevancia de la versión clásica, no extrañará la frase de S. Coleman (un físico coautor de un famoso teorema que limita las simetrías cuánticas) “*The career of a young theoretical physicist consists of treating the harmonic oscillator in ever-increasing levels of abstraction*”.

Utilizando la relación de incertidumbre de Heisenberg es fácil probar

$$(2) \quad [a, a^\dagger] = 1$$

y, con ello,

$$[\widehat{N}, a] = -a \quad \text{y} \quad [\widehat{N}, a^\dagger] = a^\dagger \quad \text{donde} \quad \widehat{N} = a^\dagger a.$$

Por ejemplo,  $[\widehat{N}, a] = a^\dagger a^2 - aa^\dagger a = -[a, a^\dagger]a = -a$ . Al operador  $\widehat{N}$  se le llama *operador número* pues servirá para numerar los niveles de energía.

Estos operadores permiten dar una expresión simple para  $\widehat{H}$ :

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar\omega}{4}(a^\dagger - a)^2 + \frac{\hbar\omega}{4}(a^\dagger + a)^2 = \frac{\hbar\omega}{2}(a^\dagger a + aa^\dagger) = \frac{\hbar\omega}{2}(2\widehat{N} + [a, a^\dagger])$$

que utilizando (2) produce

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)$$

y lo anterior lleva a

$$[\hat{H}, a] = -\hbar\omega a \quad \text{y} \quad [\hat{H}, a^\dagger] = \hbar\omega a^\dagger.$$

Ahora podemos entrar en el esquema mencionado para las matrices con  $A = \hat{H}$  y  $B = a$  o  $B = a^\dagger$ . Concretamente, digamos que  $|E\rangle$  es un *autoestado* (normalizado) de energía  $E$ , esto es,  $\hat{H}|E\rangle = E|E\rangle$ , el análogo del autovector considerado para las matrices. Entonces  $|E_+\rangle = a^\dagger|E\rangle$  y  $|E_-\rangle = a|E\rangle$ , supuestos no nulos, son autoestados de energías  $E + \hbar\omega$  y  $E - \hbar\omega$  porque podemos efectuar el mismo cálculo que llevamos a cabo con las matrices:

$$(3) \quad \begin{cases} \hat{H}|E_+\rangle = ([\hat{H}, a^\dagger] + a^\dagger\hat{H})|E\rangle = \hbar\omega a^\dagger|E\rangle + Ea^\dagger|E\rangle = (E + \hbar\omega)|E_+\rangle, \\ \hat{H}|E_-\rangle = ([\hat{H}, a] + a\hat{H})|E\rangle = -\hbar\omega a|E\rangle + Ea|E\rangle = (E - \hbar\omega)|E_-\rangle. \end{cases}$$

Es decir,  $a$  y  $a^\dagger$  permiten bajar y subir las energías, por eso reciben el nombre colectivo de *operadores escalera* (del inglés, *ladder operators*). El análogo de (3) con  $\hat{N}$  en lugar de  $\hat{H}$  simplifica las constantes, de modo que  $a$  reduce y  $a^\dagger$  incrementa el autovalor en una unidad.

$$\text{número, energía:} \quad \left(0, \frac{1}{2}\hbar\omega\right) \begin{array}{c} \xleftarrow{a} \\ \xrightarrow{a^\dagger} \end{array} \left(1, \frac{3}{2}\hbar\omega\right) \begin{array}{c} \xleftarrow{a} \\ \xrightarrow{a^\dagger} \end{array} \left(2, \frac{5}{2}\hbar\omega\right) \begin{array}{c} \xleftarrow{a} \\ \xrightarrow{a^\dagger} \end{array} \left(3, \frac{7}{2}\hbar\omega\right) \begin{array}{c} \xleftarrow{a} \\ \xrightarrow{a^\dagger} \end{array} \dots$$

De esta forma, si hallamos una solución de (1) con cierta energía, hallaremos infinitas. Para hallar tal solución que actúe de semilla, observemos que, con la notación anterior,

$$0 \leq \langle E|a^\dagger a|E\rangle = \langle E|\hat{N}|E\rangle = \frac{1}{\hbar\omega} \langle E|\hat{H}|E\rangle - \frac{1}{2} \langle E|E\rangle = \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}.$$

Por tanto, la mínima energía posible es  $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ . Suponiendo que hay un autoestado, que denominaremos  $|0\rangle$ , con energía  $E_0$ , debe cumplir  $a|0\rangle = 0$  porque, en otro caso,  $a|0\rangle$  sería un autoestado de energía menor que  $E_0$  por (3). La relación  $a|0\rangle = 0$  da lugar a una ecuación diferencial ordinaria sencilla de variables separables para la función de ondas  $\psi_0 = \psi_0(x)$  correspondiente al estado fundamental  $|0\rangle$ , el de energía mínima:

$$(4) \quad x\psi_0 + \frac{\hbar}{m\omega}\psi_0' = 0 \implies \frac{\psi_0'}{\psi_0} = -\frac{m\omega}{\hbar}x \implies \psi_0(x) = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{1}{2}m\omega x^2/\hbar}$$

donde la constante fea con la raíz cuarta es solo para normalizar. Salvo multiplicar por una constante de módulo uno, esta solución normalizada es única. Un cálculo comprueba que realmente  $\psi = \psi_0$  verifica la ecuación de partida (1) con  $E = E_0$ .

Según (3), los estados

$$(5) \quad |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

cumplen

$$\widehat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle \quad \text{con} \quad E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad \text{y} \quad \widehat{N}|n\rangle = n|n\rangle.$$

La raíz del factorial, de nuevo es para normalizar. Así se tiene  $\sqrt{n+1}|n+1\rangle = a^\dagger|n\rangle$  y, por tanto,

$$\langle n+1|n+1\rangle = \frac{\langle n|aa^\dagger|n\rangle}{n+1} = \frac{1}{n+1} \langle n|[a, a^\dagger] + \widehat{N}|n\rangle = \frac{1}{n+1} \langle n|n\rangle + \frac{n}{n+1} \langle n|n\rangle = \langle n|n\rangle.$$

De este modo  $|0\rangle$  normalizado implica  $|n\rangle$  normalizado por inducción.

El operador  $a^\dagger$ , olvidando las constantes físicas, es sencillo, esencialmente una derivada. Con la ayuda de un ordenador podemos calcular fácilmente de forma recurrente la función de ondas  $\psi_n = \psi_n(x)$  correspondiente a cada  $|n\rangle$  en un rango dado. Tales  $\psi_n$  se irán complicando según crece  $n$  porque así ocurre con las derivadas sucesivas de  $\psi_0$ . Es fácil ver que  $\psi_n = P_n\psi_0$  con  $P_n$  un polinomio de grado  $n$ . Salvo las constante de normalización y un sencillo cambio lineal, estos  $P_n$  son los *polinomios de Hermite* que aparecen en múltiples problemas de matemáticas y física. También las  $\psi_n$  aparecen en problemas que no tienen nada que ver con el oscilador armónico cuántico y, salvo los cambios menores mencionados, se llaman *funciones de Hermite*. Por ejemplo, sirven para caracterizar a las funciones que coinciden con su transformada de Fourier [4, §2.5], como  $e^{-\pi x^2}$ . A pesar de que estos polinomios y funciones están ligados al nombre de C. Hermite, que estudió algunas de sus propiedades y los generalizó a varias variables, en realidad fueron introducidos mucho antes por P. Laplace.

Resumiendo, lo que hemos hecho desde el punto de vista matemático es probar mediante un elegante método basado en álgebra lineal que (1) tiene el tipo de soluciones buscadas para  $E = \hbar\omega(n+1/2)$  con  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y que tales soluciones  $\psi_n$  se pueden calcular con un algoritmo que es una pequeña variante de tomar derivadas sucesivas.

Para completar totalmente nuestro objetivo, debemos verificar que no hay más soluciones (salvo multiplicar por constantes). Es decir, si  $\widehat{H}|E\rangle = E|E\rangle$  con  $|E\rangle$  normalizado, hay que demostrar que existe un  $n \geq 0$  tal que  $E = E_n$  y  $|E\rangle$  representa el mismo estado que  $|n\rangle$  (coinciden salvo multiplicar por una constante de módulo 1). De nuevo, desde el punto de vista analítico, teniendo en mente (1), parece un resultado difícil. Sin embargo, una continuación de la construcción algebraica permite deducirlo sin mucho esfuerzo. En lugar de trabajar con  $\widehat{H}$  vamos a hacerlo con  $\widehat{N}$  que tiene constantes más simples. Claramente  $\widehat{N}|E\rangle = \lambda|E\rangle$  con  $E = \hbar\omega(\lambda + 1/2)$  y  $E = E_n$  equivale a  $\lambda = n$ .

Supongamos que  $\lambda \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Al aplicar  $k \geq 0$  veces la segunda línea de (3) se deduce  $\widehat{N}a^k|E\rangle = (\lambda - k)a^k|E\rangle$ . Por tanto,  $a^k|E\rangle \neq 0$  implica  $a^{k+1}|E\rangle \neq 0$  (porque  $\widehat{N} = a^\dagger a$ ) y todos los  $a^k|E\rangle$  son estados. Tomando  $k > \lambda$  se sigue que  $a^k|E\rangle$  tiene energía menor que  $E_0$ , lo cual es una contradicción.

Una vez que hemos probado que  $\lambda = n$  para cierto  $n$  se tiene, como hemos visto antes,  $\widehat{N}a^k|E\rangle = (n - k)|E\rangle$ , pero el razonamiento subsiguiente para obtener  $a^k|E\rangle \neq 0$  solo funciona cuando  $0 \leq k \leq n$ . Por otro lado, debe cumplirse  $a^{n+1}|E\rangle = 0$  para evitar energías menores que  $E_0$ . Por la unicidad en (4) al calcular el estado fundamental se tiene que  $a^n|E\rangle$  y  $|0\rangle$  representan el mismo estado (aunque el primero no está normalizado). Aplicando  $a^\dagger$  sucesivas veces e introduciendo una constante normalizadora,  $|\tilde{E}\rangle = \frac{1}{n!}(a^\dagger)^n a^n|E\rangle$  y  $|n\rangle$  son el mismo

estado. Para terminar basta ver que  $|\tilde{E}\rangle = |E\rangle$ . De hecho vamos a probar la igualdad más general

$$n! |\tilde{E}\rangle = k!(a^\dagger)^{n-k} a^{n-k} |E\rangle \quad \text{para } 0 \leq k \leq n.$$

Para  $k = 0$  es trivial. En otro caso el segundo miembro es  $k!(a^\dagger)^{n-k-1} \widehat{N} a^{n-k-1} |E\rangle$  que coincide con  $k!(n - (n - k - 1))(a^\dagger)^{n-k-1} a^{n-k-1} |E\rangle$ , por la relación  $\widehat{N} a^k |E\rangle = (n - k) |E\rangle$ . De este modo, la igualdad se sigue por inducción finita.

## 4.2. Estados coherentes

Una vez que tenemos las energías y los autoestados para el oscilador armónico, es inmediato obtener una expresión en forma de serie para la evolución en el tiempo:

$$(6) \quad \Psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle \quad \text{con } E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Necesariamente los  $|n\rangle$  son ortonormales porque son autoestados con valores propios (energías) distintos del operador autoadjunto  $\widehat{H}$  (el observable de la energía) y los habíamos escogido normalizados. Por tanto, los  $c_n$  se obtienen a partir de la condición inicial  $|\Psi\rangle_{t=0} = \Psi(x, 0)$  mediante  $c_n = \langle n | \Psi \rangle_{t=0}$ . En términos más explícitos

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, 0) (a^\dagger)^n \psi_0(x) dx \quad \text{con } \psi_0(x) = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{1}{2}m\omega x^2/\hbar}.$$

No es necesaria la conjugación del producto escalar de  $L^2$  porque  $\psi_0$  es real.

Una pregunta natural es en qué sentido  $\Psi(x, t)$  representa algo parecido al movimiento armónico simple. Podríamos apelar al teorema de Ehrenfest o a la imagen de Heisenberg (cf. [1, §4.4.1]), pero en su lugar vamos a hacer un cálculo directo. El promedio de la posición es, empleando (6),

$$\langle x \rangle = \langle \Psi | \widehat{x} | \Psi \rangle = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} c_{n_1}^* c_{n_2} e^{i\omega t(n_1 - n_2)} \langle n_1 | \widehat{x} | n_2 \rangle.$$

Expresando  $\widehat{x}$  en términos de  $a$  y  $a^\dagger$  (sumando sus definiciones), es fácil deducir

$$\langle n_1 | \widehat{x} | n_2 \rangle = 0 \quad \text{si } |n_1 - n_2| \neq 1, \quad \langle n_1 | \widehat{x} | n_2 \rangle = \sqrt{\frac{\hbar \max(n_1, n_2)}{2m\omega}} \quad \text{si } |n_1 - n_2| = 1.$$

Así pues,

$$\langle \Psi | \widehat{x} | \Psi \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} (e^{-i\omega t} c_n c_{n-1}^* + e^{i\omega t} c_n^* c_{n-1})$$

que puede escribirse de la forma

$$\langle \Psi | \widehat{x} | \Psi \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos(\omega t + \varphi_n)$$

para ciertas constantes  $d_n \in \mathbb{C}$  y  $\varphi_n \in \mathbb{R}$  que dependen de  $c_n$ . Es decir, tenemos una superposición de osciladores armónicos clásicos, en general, desfasados.

Ahora nos vamos a ocupar de ciertas soluciones del oscilador armónico cuántico que representan bien la idea clásica, pues la densidad de probabilidad se trasladará siguiendo un movimiento armónico simple. Además tienen otras propiedades interesantes relativas al principio de incertidumbre.

La definición de partida no es muy ilustrativa. Para un tiempo inicial  $t = 0$  consideramos un autoestado  $|\alpha\rangle$  de  $a$  con autovalor  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle.$$

Se dice que  $|\alpha\rangle$  es un *estado coherente*. La notación, aunque común, es claramente criticable porque para  $\alpha \in \mathbb{N}$  este  $|\alpha\rangle$  no tiene nada que ver con los de (5). La definición da lugar a una ecuación diferencial sencilla (de primer orden y variables separables) que permite asignar a  $|\alpha\rangle$  una función de ondas  $\psi_\alpha = \psi_\alpha(x)$

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( x\psi_\alpha + \frac{\hbar}{m\omega} \psi'_\alpha \right) = \alpha\psi_\alpha \implies \psi_\alpha(x) = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \exp \left( - \left( x\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} - \alpha \right)^2 \right)$$

donde la constante multiplicativa se ha elegido para normalizar.

Tomemos ahora en el oscilador armónico como estado inicial  $|\alpha\rangle$  y llamemos  $|\alpha, t\rangle$  al estado obtenido en tiempo  $t$ , es decir, al que tiene como función de ondas (6). Recordando la definición de  $|n\rangle$  en (5), los coeficientes son

$$c_n = \langle n|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle 0|a^n|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0|\alpha\rangle.$$

De modo que

$$|\alpha, t\rangle = \langle 0|\alpha\rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle = \langle 0|\alpha\rangle e^{-i\omega t/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

Comparando los casos  $t = 0$  y  $t$  arbitrario, se tiene

$$|\alpha, t\rangle = e^{-i\omega t/2} |\alpha e^{-i\omega t}, 0\rangle = e^{-i\omega t/2} |\alpha e^{-i\omega t}\rangle$$

donde estamos permitiendo por un momento estados coherentes correspondientes a valores complejos. Esto no afecta a la  $\psi_\alpha$  antes hallada, fuera de la constante de normalización, porque la ecuación diferencial es la misma. Haciendo los cálculos, se sigue que la función de ondas  $\Psi_\alpha(x, t)$  correspondiente a  $|\alpha, t\rangle$  da lugar a la densidad de probabilidad

$$|\Psi_\alpha(x, t)|^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \exp \left( - 2 \left( x\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} - \alpha \cos(\omega t) \right)^2 \right).$$

Un comentario al margen es que los cálculos se pueden hacer rápido empleando  $|e^{-(a+bi)^2}| = e^{b^2-a^2}$  para  $a, b \in \mathbb{R}$  y ajustando *a posteriori* la constante de normalización. La conclusión es

que la densidad de probabilidad en cada instante se obtiene trasladando  $|\psi_\alpha(x)|^2$  de acuerdo con un movimiento armónico simple clásico. En cierto modo, los estados coherentes en su evolución no cambian de forma, solo se mueven. Nótese el contraste con el caso del paquete de ondas gaussiano que se iba dispersando según avanzaba el tiempo.

Otra propiedad notable de los estados coherentes es que alcanzan la igualdad en el principio de incertidumbre de Heisenberg. Lo vamos a comprobar solo para el tiempo inicial  $t = 0$  aunque empleando  $|\alpha, t\rangle = e^{-i\omega t/2} |\alpha e^{-i\omega t}\rangle$  una pequeña modificación de los cálculos [6, §4.4] muestra que es un hecho general.

Relacionando  $\hat{x}$  con  $a$  y  $a^\dagger$  se tiene

$$\sigma_x^2 = \langle \alpha | \hat{x}^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{x} | \alpha \rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} (\langle \alpha | (a + a^\dagger)^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | (a + a^\dagger) | \alpha \rangle^2).$$

Procediendo de la misma forma con  $\hat{p}$ ,

$$\sigma_p^2 = \langle \alpha | \hat{p}^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{p} | \alpha \rangle^2 = -\frac{m\hbar\omega}{2} (\langle \alpha | (a - a^\dagger)^2 | \alpha \rangle - i \langle \alpha | (a - a^\dagger) | \alpha \rangle^2).$$

Con la relación de conmutación (2) se prueba la identidad

$$(a \pm a^\dagger)^2 = a^2 \pm 2a^\dagger a \pm [a, a^\dagger] + (a^\dagger)^2 = a^2 \pm 2a^\dagger a \pm 1 + (a^\dagger)^2.$$

Ahora solo hay que recordar  $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ , por definición, y su dual  $\langle\alpha|a^\dagger = \alpha\langle\alpha|$ . Empleando sucesivas veces estas fórmulas se obtienen

$$\sigma_x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} \quad \text{y} \quad \sigma_p^2 = \frac{m\hbar\omega}{2}$$

Por ejemplo, para el cálculo de  $\sigma_p^2$  es bastante obvio que  $\langle\alpha|(a - a^\dagger)|\alpha\rangle$  se anula, mientras que la identidad para  $(a - a^\dagger)^2$  implica

$$\langle\alpha|(a - a^\dagger)^2|\alpha\rangle = \langle\alpha|a^2|\alpha\rangle - 2\langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle - \langle\alpha|\alpha\rangle + \langle\alpha|(a^\dagger)^2|\alpha\rangle$$

que es  $\alpha^2 - 2\alpha^2 - 1 + \alpha^2 = -1$ . Un razonamiento similar lleva a la evaluación de  $\sigma_x^2$ .

Con ello hemos probado que para los estados coherentes  $\sigma_x\sigma_p = \frac{1}{2}\hbar$ . En particular, la constante en el principio de incertidumbre de Heisenberg es inmejorable.

### 4.3. Vibraciones de un retículo

¿Qué ocurre si en vez de un oscilador armónico tenemos  $M$ ? Según el Postulado 4 los autoestados son productos tensoriales  $|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \cdots \otimes |n_M\rangle$ . Leyendo el comentario que sigue a tal postulado, entendemos que en realidad estamos haciendo algo muy sencillo, simplemente considerar el producto usual  $\Psi(x_1, x_2, \dots, x_M) = \psi_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2)\cdots\psi_{n_M}(x_M)$ , con  $\Psi_n$  la función de ondas de  $|n\rangle$ . Obviamente verifica

$$\hat{H}_M\Psi = (E_{n_1} + E_{n_2} + \cdots + E_{n_M})\Psi \quad \text{con} \quad \hat{H}_M = \sum_{\ell=1}^M \left( \frac{\hat{p}_\ell^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}_\ell^2 \right).$$

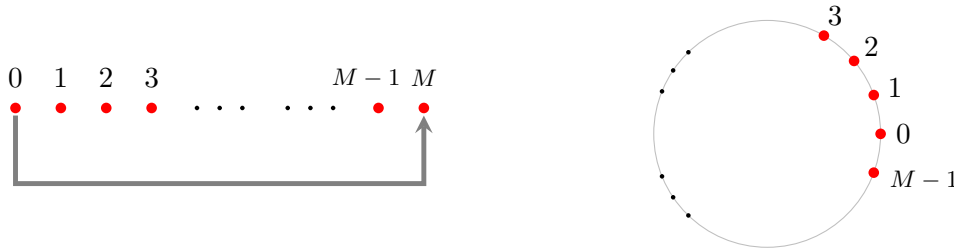
Este operador es la suma de los observables de energía para cada oscilador. La idea física está clara, pues estamos considerando osciladores independientes y la probabilidad debe ser el producto de las probabilidades. Cada variable de  $\Psi$  corresponde a un oscilador. Para cada uno de ellos podríamos introducir operadores de destrucción y de creación  $a_\ell$  y  $a_\ell^\dagger$  donde el subíndice indica a qué variable se aplica. De esta forma,  $\hat{H}_M$  y el estado al que corresponde la función  $\Psi$  antes indicada son

$$\hat{H}_M = \hbar\omega \sum_{\ell=1}^M \left( a_\ell^\dagger a_\ell + \frac{1}{2} \right) \quad \text{y} \quad |\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \cdots n_M!}} (a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2} \cdots (a_M^\dagger)^{n_M} |0, 0, \dots, 0\rangle$$

donde  $|0, 0, \dots, 0\rangle$  es el estado fundamental, representado por  $\psi_0(x_1)\psi_0(x_2)\cdots\psi_0(x_M)$ .

Supongamos un sólido formado por átomos de un mismo elemento. Cada uno de ellos vibra alrededor de una posición media (en contraste con lo que ocurre en los líquidos y gases, donde los átomos y moléculas tienen mayor libertad), pero sería muy burdo pensar que lo hacen independientemente como en la situación que acabamos de describir.

Nuestro objetivo es construir un modelo más realista, aunque puramente académico, y relacionarlo con lo que hemos aprendido. Vamos a suponer que el sólido es un retículo unidimensional, concretamente, que los átomos están distribuidos en una línea con una separación fija entre vecinos idealizando una estructura cristalina. Por supuesto los sólidos unidimensionales no existen, por eso es un ejemplo académico, pero es un primer paso antes de tratar el caso habitual tridimensional [8] o el menos habitual bidimensional que se da en el famoso *grafeno*. También vamos a suponer que las condiciones son periódicas. Es decir, identificamos el átomo  $\ell$  y el  $\ell + M$ . De este modo, todos los sumatorios los consideraremos en índices módulo  $M$  sin recordarlo cada vez. Es como pensar que los  $M$  átomos se curvan formando una circunferencia.



Aunque parezca una hipótesis muy fuerte, no lo es tanto si pensamos en que el número de átomos es grande y una recta es como una circunferencia de radio que tiende a infinito (véase [9, §7.5] para algunos aspectos del paso al límite).

El punto fundamental del modelo es que deseamos incorporar cierta interacción entre átomos colidantes. Si pensamos en términos clásicos y en oscilaciones longitudinales, cada átomo empuja al siguiente y parece natural que haya una energía potencial dependiente de la distancia entre vecinos. Por ello, consideramos

$$\hat{H} = \sum_{\ell} \left( \frac{\hat{p}_{\ell}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}_{\ell}^2 + \frac{\kappa}{2} (\hat{x}_{\ell} - \hat{x}_{\ell+1})^2 \right)$$

donde  $\kappa$  es una constante positiva. La idea es que  $x_\ell$  es la separación de la posición de equilibrio del átomo  $\ell$  y el término con  $\hat{x}_\ell - \hat{x}_{\ell+1}$  está relacionado con la distancia entre átomos consecutivos (recordemos que  $\ell$  se considera módulo  $M$ ). En realidad lo lógico sería escribir  $\hat{x}_\ell + \ell s - (\hat{x}_{\ell+1} + (\ell+1)s)$  en su lugar con  $s$  la separación en el retículo (la distancia entre átomos vecinos en reposo), pero notando que  $\sum s(\hat{x}_\ell - \hat{x}_{\ell+1}) = 0$ , ambas situaciones son equivalentes salvo añadir una constante a  $\hat{H}$ . El hecho de que  $\kappa$  sea positivo refleja, desde el punto de vista clásico que hay una fuerza reactiva como si los átomos estuvieran unidos por muelles que se oponen a ser contraídos o estirados.

Parece un problema complicado hallar los autoestados y sus energías, porque la ecuación diferencial  $\hat{H}\Psi = E\Psi$  con  $\Psi = \Psi(x_1, x_2, \dots, x_M)$  no es nada trivial. Si has seguido un curso de mecánica, quizá conozcas que hay una bella aplicación de la diagonalización simultánea de formas cuadráticas que estudiaste en primero para resolver la versión clásica del problema. Hay restos de eso en la versión cuántica, aunque más escondido en el álgebra de los operadores. Nuestro objetivo es reducir el problema al caso en que no hay interacciones pagando el precio de que los nuevos osciladores armónicos desacoplados puedan tener frecuencias diferentes. Con este fin, introducimos los siguientes operadores que generalizan al de destrucción y creación

$$a_\ell = \sqrt{\frac{m\omega_\ell}{2\hbar}} \left( Q_\ell + \frac{iP_{-\ell}}{m\omega_\ell} \right) \quad \text{y} \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega_\ell}{2\hbar}} \left( Q_{-\ell} - \frac{iP_\ell}{m\omega_\ell} \right)$$

donde

$$\omega_\ell = \sqrt{\omega^2 + \frac{4\kappa}{m} \sin^2 \frac{\pi\ell}{M}}, \quad Q_\ell = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_n e^{-2\pi i \ell n / M} \hat{x}_n, \quad P_\ell = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_n e^{2\pi i \ell n / M} \hat{p}_n.$$

Aquí  $\hat{x}_n$  y  $\hat{p}_n$  son los operadores posición y momento para el  $n$ -ésimo átomo. El primero multiplica la función de ondas por  $x_n$  y el segundo aplica  $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_n}$ .

Operando se tiene

$$\frac{2\hbar}{m\omega_\ell} (a_\ell^\dagger a_\ell + a_{-\ell}^\dagger a_{-\ell} + 1) = F(\ell) + F(-\ell) \quad \text{con} \quad F(\ell) = Q_{-\ell} Q_\ell + \frac{P_\ell P_{-\ell}}{m^2 \omega_\ell^2} + \frac{i[Q_\ell, P_\ell] + \hbar}{m\omega_\ell}.$$

La última fracción en  $F(\ell)$  sea anula porque  $\hat{x}_n$  y  $\hat{p}_{n'}$  conmutan cuando  $n \neq n'$  lo que implica  $[Q_\ell, P_\ell] = M^{-1} \sum_n [\hat{x}_n, \hat{p}_n]$  y cada sumando es  $i\hbar$  por la relación de incertidumbre de Heisenberg. Al sumar en  $\ell$  y en  $-\ell$  cada clase módulo  $M$  aparecerá dos veces, de esta forma se deduce

$$(7) \quad \hbar \sum_\ell \omega_\ell \left( a_\ell^\dagger a_\ell + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} m \sum_\ell \omega_\ell^2 F(\ell) = \sum_\ell \left( \frac{P_\ell P_{-\ell}}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_\ell^2 Q_{-\ell} Q_\ell \right).$$

Lo que buscamos es expresar el miembro de la derecha de (7) en función de  $\hat{x}_\ell$  y  $\hat{p}_\ell$  y obtener  $\hat{H}$ .

En términos formales,  $Q_\ell$  es la *transformada discreta de Fourier* de  $\{\hat{x}_n\}$ . A pesar de que este conjunto es de operadores, se comportan como números porque conmutan entre sí. Por ello, la identidad de Parseval discreta [2, §2.2.1] es cierta con la misma demostración. Lo mismo se aplica a  $P_\ell$  y se obtiene

$$\sum_n \hat{x}_n^2 = \sum_\ell Q_{-\ell} Q_\ell \quad \text{y} \quad \sum_n \hat{p}_n^2 = \sum_\ell P_\ell P_{-\ell}.$$

Aquí  $Q_{-\ell}$  y  $P_{-\ell}$  actúan como los conjugados de  $Q_\ell$  y  $P_\ell$  en la identidad de Parseval porque el efecto de  $Q_\ell \mapsto Q_{-\ell}$  y  $P_\ell \mapsto P_{-\ell}$  es conjugar los coeficientes. Véase [8, App. C] para los cálculos directos sin referencia a la identidad de Parseval. De la misma forma se tiene [2, (2.55)]

$$\sum_n \hat{x}_n \hat{x}_{n+1} = \frac{1}{2} \sum_n (\hat{x}_n \hat{x}_{n+1} + \hat{x}_n \hat{x}_{n-1}) = \frac{1}{2} \sum_\ell (e^{2\pi i \ell / M} + e^{-2\pi i \ell / M}) Q_{-\ell} Q_\ell.$$

El último paréntesis da el doble del coseno y aplicando la fórmula del ángulo mitad se deduce

$$\sum_n \hat{x}_n \hat{x}_{n+1} = \sum_\ell \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\pi \ell}{M}\right) Q_{-\ell} Q_\ell.$$

Con todo esto,

$$\sum_\ell \left(\frac{1}{2} m \omega_\ell^2 \hat{x}_\ell^2 + \frac{\kappa}{2} (\hat{x}_\ell - \hat{x}_{\ell+1})^2\right) = \sum_\ell \left(\frac{1}{2} m \omega_\ell^2 + \kappa\right) \hat{x}_\ell^2 - \kappa \sum_\ell \hat{x}_\ell \hat{x}_{\ell+1} = \frac{1}{2} m \sum_\ell \omega_\ell^2 Q_{-\ell} Q_\ell$$

y resulta

$$\hat{H} = \sum_\ell \left(\frac{P_\ell P_{-\ell}}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_\ell^2 Q_{-\ell} Q_\ell\right).$$

Esta es la expresión que aparecía en (7), por tanto, hemos demostrado que  $\hat{H}$  se puede escribir en términos de  $a_\ell$  y  $a_\ell^\dagger$  de una manera formalmente similar al caso de  $\hat{H}_M$  con los osciladores desacoplados, salvo que la frecuencia angular es variable:

$$\hat{H} = \hbar \sum_\ell \omega_\ell \left(a_\ell^\dagger a_\ell + \frac{1}{2}\right).$$

Por la conmutación ya indicada  $[\hat{x}_n, \hat{p}_{n'}] = 0$  para  $n \neq n'$  se tiene que  $[a_\ell, a_{\ell'}] = [a_\ell, a_{\ell'}^\dagger] = 0$  para  $\ell \neq \ell'$  y se hereda la propiedad  $[a_\ell, a_\ell^\dagger] = 1$ . Por tanto, todo es idéntico al caso de los osciladores desacoplados. Así pues, partiendo del estado fundamental  $|0, 0, \dots, 0\rangle$  correspondiente al producto de las funciones de onda de los estados fundamentales de los osciladores (cada uno con su frecuencia  $\omega_\ell$ ), se generan todos los autoestados mediante

$$|n_1, n_2, \dots, n_M\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \dots n_M!}} (a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2} \dots (a_M^\dagger)^{n_M} |0, 0, \dots, 0\rangle \quad \text{con } n_\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

y la energía correspondiente es

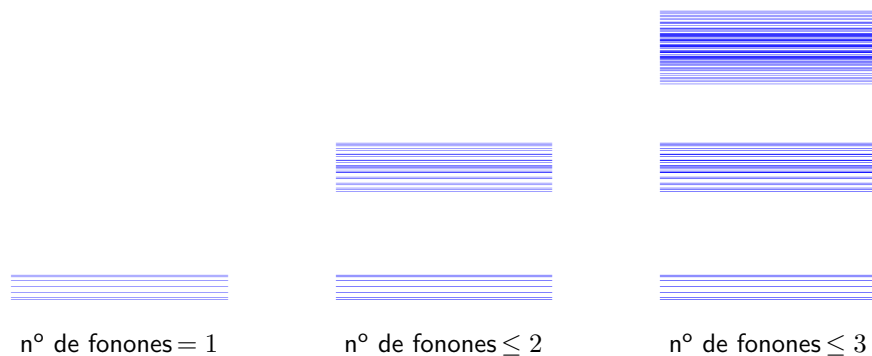
$$E_{n_1, n_2, \dots, n_M} = \hbar \sum_\ell \omega_\ell \left(n_\ell + \frac{1}{2}\right).$$

El entero  $\sum_\ell n_\ell$  es el autovalor del operador número correspondiente y se dice que da el número de *fonones*. Más concretamente, un fonón en su  $n$ -ésimo nivel excitado, que equivale a  $n$  fonones, es un autoestado de la forma  $\frac{1}{\sqrt{n}} (a_\ell^\dagger)^n |0, 0, \dots, 0\rangle$ , es decir, lo que corresponde en el caso desacoplado a que solo una de las partículas oscile. Como hemos hecho unos cambios matemáticos no corresponde realmente a una sola partícula sino que manifiesta la cuantización

de las vibraciones elásticas globales en un sólido. Sin embargo, a veces es conveniente pensar en términos de estas partículas ficticias, que son creadas y destruidas por  $a_\ell^\dagger$  y  $a_\ell$ , y considerar que los autoestados están compuestos por  $\sum_\ell n_\ell$  de ellas.

Si  $M$ , el número de átomos, es muy grande entonces el rango de valores de  $\omega_\ell$  se aproxima al intervalo  $[\omega, \sqrt{\omega^2 + 4\kappa/m}]$  lo que da lugar a que las energías se estructuren en bandas dependiendo del número de fonones.

A modo de ilustración, la siguiente figura representa con líneas horizontales los niveles para  $M = 12$  con  $\omega = 1$  y  $\kappa/m = 1/8$  cuando el número de fonones varía entre uno y tres:



Más allá de la pronunciación, hay cierta similitud entre los fonones y los fotones, pero requiere conocimientos avanzados. Resulta que los fotones son excitaciones del campo electromagnético que se puede considerar compuesto por infinitud de osciladores armónicos desacoplados [1, §13.1]. En este marco, los cuantos de luz de Einstein con energía  $\hbar\omega$  adquieren sentido natural. Por supuesto, las oscilaciones de las ondas electromagnéticas no son materiales (como pensaba Maxwell), pero guardando la analogía se podría decir que los fotones son los fonones de la luz.

## Ejercicios de la sección 4

**EJERCICIO 1.** Calcula la energía en términos de la amplitud, la masa y la frecuencia angular para el oscilador armónico clásico. Comprueba que el resultado tiene realmente dimensiones de energía.

**EJERCICIO 2.** Sean  $A$  y  $B$  matrices hermíticas ( $A^\dagger = A$ ,  $B^\dagger = B$ ) de la misma dimensión. Deduce que  $[A, B] = cB$  con  $c \in \mathbb{C}$  implica  $c = 0$  probando primero que  $[A, B^2] = 2cB^2$  y que  $\text{Tr}([A, B^2]) = 0$  con  $\text{Tr}$  la traza. **Indicación:** Recuerda las propiedades de la traza y que las matrices hermíticas tienen autovalores reales.

**EJERCICIO 3.** Comprueba que  $y = e^{-x^2/2}$  satisface  $y'' + y = x^2y$ . Utiliza esta relación para obtener una solución del oscilador armónico cuántico llevando a cabo un cambio  $y(x) \mapsto y(bx)$ . ¿Qué energía tiene?

**EJERCICIO 4.** Sean  $A, B \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  tales que  $BAB^{-1} = cA^{-1}$  con  $c \in \mathbb{C}$ . Demuestra que si  $\vec{v}$  es autovector de  $A$ ,  $B\vec{v}$  también lo es. Comprueba que cualquier  $A \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$  simétrica lo cumple con  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . ¿Sabrías explicar geoméricamente por qué  $B$  intercambia los autovectores?

EJERCICIO 5. Demuestra  $[a, a^\dagger] = 1$  y  $[\widehat{N}, a^\dagger] = a^\dagger$ .

EJERCICIO 6. Halla la función de ondas (independiente del tiempo) correspondiente al autoestado  $|1\rangle$  en el oscilador armónico. Prueba que la correspondiente a  $|n\rangle$  es de la forma  $P_n\psi_0$  con  $P_n$  un polinomio de grado  $n$  que cumple  $P_n(x) = (-1)^n P_n(-x)$ .

EJERCICIO 7. Demuestra que  $\langle n_1 | \widehat{x} | n_2 \rangle$  es  $\sqrt{\hbar \max(n_1, n_2) / (2m\omega)}$  si  $|n_1 - n_2| = 1$  y cero en otro caso.

EJERCICIO 8. Demuestra  $\langle \alpha | \widehat{N} | \alpha \rangle = \alpha^2$  para un estado coherente  $|\alpha\rangle$ , comprueba  $(a + a^\dagger)^2 = a^2 + (a^\dagger)^2 + 2\widehat{N} + 1$  y usa estos resultados para verificar  $\sigma_x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$ .

EJERCICIO 9. Comprueba la relación  $\langle 0 | \alpha \rangle = e^{-\alpha^2/2}$  para  $\alpha \in \mathbb{R}$  con  $|\alpha\rangle$  estado coherente. Nota: Esta fórmula se empleará en los dos ejercicios siguientes.

EJERCICIO 10. Demuestra que la probabilidad de que al medir la energía de  $|\alpha, t\rangle$  para  $t$  fijado se obtenga  $E_n$  sigue una distribución de Poisson.

EJERCICIO 11. Demuestra que los estados coherentes verifican  $|\alpha\rangle = e^{-\alpha^2/2} \exp(\alpha a^\dagger) |0\rangle$ .

EJERCICIO 12. Un resultado sobre exponenciales de operadores afirma que si  $[[A, B], A] = [[A, B], B] = 0$  entonces se cumple  $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) \exp(-\frac{1}{2}[A, B])$ . Dándolo por sabido deduce de ello que si  $\alpha \in \mathbb{R}$  se tiene  $\exp(\alpha(a^\dagger - a)) = e^{-\alpha^2/2} \exp(\alpha a^\dagger) \exp(-\alpha a)$ . Empleando el ejercicio anterior, concluye  $|\alpha\rangle = \exp(-ir\widehat{p}) |0\rangle$  donde  $\alpha = r\sqrt{m\omega\hbar}/2$ . En definitiva, los estados coherentes son el resultado de aplicar exponenciales del momento al estado fundamental.

## Referencias

- [1] G. Auletta, M. Fortunato, and Parisi. G. *Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2009.
- [2] F. Chamizo. A course on signal processing. [https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/fich/signal\\_processing.pdf](https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/fich/signal_processing.pdf), 2020.
- [3] K. Conrad. Simultaneous commutativity of operators. <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/linmultialg/simulcomm.pdf>, 2026.
- [4] H. Dym and H. P. McKean. *Fourier series and integrals*. Probability and Mathematical Statistics, No. 14. Academic Press, New York-London, 1972.
- [5] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman lectures on physics. Vol. 1: Mainly mechanics, radiation, and heat*. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London, 1963. Available in <https://www.feynmanlectures.caltech.edu/>.
- [6] A. Galindo and P. Pascual. *Quantum mechanics. I*. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1990. Translated from the Spanish by J. D. García and L. Alvarez-Gaumé.

- [7] D. J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics (2nd Edition)*. Pearson Prentice Hall, 2nd edition, 2004.
- [8] C. Kittel. *Introduction to solid state physics*. John Wiley and Sons, 8th edition, 2004.
- [9] F. J. Ynduráin. *Mecánica cuántica*. Alianza Universidad Textos, 1988.