

# Postulados, medición e incertidumbre

Seminario: Introducción a la física cuántica      segundo semestre 2025–2026

Fernando Chamizo      <https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/>

Muy pronto se introdujo una compleja formalización matemática de la mecánica cuántica con los elementos del análisis funcional. Sin embargo, todo este armazón matemático no impidió que a físicos teóricos de la talla de Einstein o Schrödinger les resultase inadmisibles la interpretación, todavía vigente, llamada de Copenhague. El problema asociado de la medición es un obstáculo al que simplemente nos hemos acostumbrado.

## 3.1. El formalismo y la interpretación de Copenhague

J. von Neumann, uno de los grandes matemáticos del siglo XX y Dirac uno de los físicos de primera línea con mayor inclinación por las matemáticas [1], escribieron sendos libros [21] y [9], con primera ediciones de 1932 y 1930, que tuvieron un impacto decisivo en la formalización matemática de la física cuántica.

En esta línea teórica, se daba una fundamentación a través de postulados en gran medida ligados al análisis funcional. Hoy en día, no hay acuerdo unánime entre los autores cuando uno consulta los postulados de la mecánica cuántica, ni siquiera en su número. Además tienen un enunciado muy extraño, lejos de ser verdades evidentes por sí mismas como los postulados de la geometría de Euclides. Veremos aquí una versión abreviada de ellos (esencialmente tomada de [19], véase [11] para otros más completos).

No supondremos conocimientos previos de análisis funcional, solo de álgebra lineal que es su hermana pequeña de dimensión finita (si, no obstante, tienes interés en el tema, dos buenos libros de análisis funcional con algunas aplicaciones matemáticas son [17] y [5]). El objetivo que perseguimos es aprender la notación y tener una idea acerca de cómo alguien en su sano juicio pudo llegar a concebir estos postulados.

Hasta ahora, hemos considerado que las partículas cuánticas eran una suerte de ondas complejas que en los ejemplos aparecían como combinaciones lineales (superposiciones) de otras asociadas a la energía, lo que sugiere una estructura de espacio vectorial. Además, la norma de  $L^2$  en diferentes versiones (sobre  $\mathbb{R}$ , sobre  $[0, L]$  bajo condiciones periódicas o bajo anulación en los extremos). Dicha norma proviene del producto escalar  $\int f^*g$  y tales productos han aparecido por sí mismos en los cálculos. Todo esto lleva a los *espacios de Hilbert* introducidos por D. Hilbert alrededor de 1909, mucho antes del nacimiento oficial de la mecánica cuántica. Un espacio de Hilbert es simplemente un espacio vectorial completo (se pueden tomar límites) con producto escalar [5]. El nombre, aunque general, se aplica sobre todo al caso de dimensión infinita, de hecho quizá en la asignatura de Álgebra Lineal hayas oído la terminología *espacio vectorial euclídeo* y *unitario* para el caso finito sobre  $\mathbb{R}$  y sobre  $\mathbb{C}$ .

Los autores más matemáticos añaden la propiedad topológica de *separable* (existen conjuntos numerables densos) y algún tipo de “proyectivización” debido a que  $\Psi$  y  $2026\Psi$  representan lo mismo tras normalizar.

**Postulado 1.** *Un sistema cuántico aislado viene representado por un espacio de Hilbert separable sobre  $\mathbb{C}$  y, en cada instante fijado, el estado del sistema viene dado por un elemento no nulo de él y todos sus múltiplos no nulos.*

Una primera cuestión es si no estamos complicando las cosas metiendo más terminología matemática de la necesaria cuando solo vamos a ocuparnos de funciones de ondas. Hay un ápice de verdad en ello en el sentido de que en la práctica el espacio de Hilbert es el espacio en el que se trabaja para resolver un problema y que uno no se molesta en definir, además de que a veces conviene salirse de la estructura permitiendo vectores de norma infinita (funciones de onda no normalizables). Sin embargo, este postulado permite dar mayor generalidad a lo que hemos hecho. Porque las funciones de onda o sus análogos serán bien distintas en contextos diferentes del estudiado de una partícula bajo un potencial. Por ejemplo, en un átomo polieletrónico deberíamos permitir más variables y en el estudio de algunas propiedades cuánticas que solo admiten un número finito de valores nos deberíamos restringir a dimensión finita.

Dirac introdujo en 1939 [8] una notación muy útil que sigue en uso. En lugar de escribir los vectores de un espacio de Hilbert como  $\vec{v}$  o con nombre de función, Dirac propuso la notación  $|\alpha\rangle$  donde  $\alpha$  es algún símbolo, a veces una letra, a veces un número, que representa al estado cuántico, mientras que  $\langle\alpha|$  es el elemento del dual correspondiente, es decir,  $\langle\alpha|$  aplicado a  $|\beta\rangle$  da el producto escalar de  $|\alpha\rangle$  y  $|\beta\rangle$ , que con la notación de Dirac es  $\langle\alpha|\beta\rangle$ . Dirac termina su artículo con “*I suggest the words bra and ket respectively*”, porque entre los dos forman un *bra(c)ket*. Tal sugerencia ha pegado y se aplica hoy a  $\langle\alpha|$  y a  $|\alpha\rangle$ .

Una observación importante es que en física, contradiciendo la costumbre en álgebra lineal, se considera que el producto escalar es antilineal en el primer argumento y lineal en el segundo:

$$\langle\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2|\beta\rangle = \lambda_1^* \langle\alpha_1|\beta\rangle + \lambda_2^* \langle\alpha_2|\beta\rangle \quad \text{y} \quad \langle\alpha|\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2\rangle = \lambda_1 \langle\alpha|\beta_1\rangle + \lambda_2 \langle\alpha|\beta_2\rangle$$

para  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ . Aquí estamos abusando un poco de la notación pues hay que entender que  $|\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2\rangle$  es  $\lambda_1 |\beta_1\rangle + \lambda_2 |\beta_2\rangle$  y que  $\langle\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2|$  es el *bra* asociado al *ket*  $\lambda_1 |\alpha_1\rangle + \lambda_2 |\alpha_2\rangle$ , pues  $\alpha_j$  y  $\beta_j$  podrían ser meras etiquetas.

Otra sugerencia notacional que apunta Dirac es emplear  $\langle\alpha|H|\beta\rangle$  cuando  $H$  es un *operador* del espacio de Hilbert, una función lineal de este espacio en sí mismo (un *endomorfismo*). De este modo,

$$\langle\alpha|H|\beta\rangle = \text{prod. escalar de } |\alpha\rangle \text{ por } H|\beta\rangle = \text{prod. escalar de } H^\dagger|\alpha\rangle \text{ por } |\beta\rangle$$

donde  $H^\dagger$  es el *operador adjunto* de  $H$ , definido justamente por la segunda igualdad. Quizá, al menos con matrices, en Álgebra Lineal lo denotaste con  $H^*$ , pero en física se usa  $H^\dagger$  para no confundir con el conjugado. Recuerda que con el producto escalar usual de  $\mathbb{C}^n$  el adjunto tenía como matriz la traspuesta conjugada.

Para el caso de un estado representado por una función de ondas  $\Psi$ , es natural emplear  $|\Psi\rangle$  o  $|\Psi(t)\rangle$  si se especifica el tiempo, pero es solo una opción. Por ejemplo, podemos denotar las

soluciones estacionarias normalizadas  $e^{-iE_n t/\hbar} \psi_n(x)$  de la partícula libre en el circunferencia como  $|n\rangle$  simplemente para que nos recuerde a que las energías están cuantizadas con  $n \in \mathbb{Z}$ . El espacio de Hilbert subyacente es  $L^2([0, L])$  con el producto escalar  $\int_0^L f^* g$ , de esta forma se tiene  $\langle n|m \rangle = 1$  si  $n = m$  y cero en otro caso. La solución general es

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m |m\rangle \quad \text{con} \quad a_n = \langle n|\Psi(0)\rangle$$

La fórmula para  $a_m$  se obtiene premultiplicando por  $\langle n|$ . El operador Hamiltoniano cumple  $H|n\rangle = E_n|n\rangle$ , en particular  $E_n = \langle n|H|n\rangle$ .

Casi siempre que uno ve una alteración en sus costumbres experimenta cierta reacción. Es natural que la notación de Dirac parezca al principio rara e innecesaria, pero hay que aprenderla porque está firmemente asentada, porque añade intuición en algunos cálculos y porque, en otros, conlleva una simplificación.

Una vez que hemos formalizado los estados para un tiempo fijo, nos preocupamos de su evolución. En la sección anterior tal evolución venía determinada por la ecuación de Schrödinger. De nuevo el objetivo es la generalidad. En un sistema con varias partículas o donde entran campos electromagnéticos (lo cuales tienen dos potenciales, uno escalar y otro vectorial [12]) el esquema utilizado hasta ahora se queda corto. Lo realmente importante es que la ecuación de Schrödinger en cada situación dé lugar a una evolución que preserve la probabilidad. En términos de álgebra lineal, las aplicaciones lineales que preservan la norma se dice que son *unitarias* y de ahí surgía el concepto de *matriz unitaria* que estudiaste. De la misma forma, un operador en un espacio de Hilbert se dice que  $U$  es un *operador unitario* si verifica

$$\langle U\alpha|U\alpha\rangle = \langle \alpha|\alpha\rangle \quad \text{o, equivalentemente,} \quad \langle U\alpha|U\beta\rangle = \langle \alpha|\beta\rangle$$

donde, de nuevo estamos cometiendo un pequeño abuso de notación identificando  $U\alpha$  y  $U|\alpha\rangle$ . La equivalencia se sigue por la *identidad de polarización* [18].

**Postulado 2.** *La evolución de un estado en un tiempo inicial  $t_i$  a otro estado en un tiempo  $t$  viene dada por la acción de un operador unitario  $U(t, t_i)$ , esto es,  $|\Psi(t)\rangle = U(t, t_i)|\Psi(t_i)\rangle$ .*

Una forma alternativa de este postulado es afirmar la existencia de una *ecuación de Schrödinger* en sentido general. Concretamente, que existe un operador autoadjunto  $H(t)$  tal que

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H(t) |\Psi(t)\rangle.$$

Con nuestra notación, autoadjunto significa  $H(t)^\dagger = H(t)$ . Los operadores autoadjuntos se dicen que son los *observables* en mecánica cuántica. La razón de tan extraño nombre quedará claro en el siguiente postulado. El observable  $H(t)$  en la ecuación anterior está asociado a la energía. En algunos textos (por ejemplo [13, 3.2.1]) los observables se dice que corresponden a los *operadores hermíticos*, pero en rigor matemático autoadjunto y hermítico no son exactamente lo mismo.

En el caso de una partícula en una dimensión,  $H(t)$  era el operador hamiltoniano (se le suele llamar así cuando no depende del tiempo) dado por  $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V$ . Para ver que esta segunda versión del postulado implica la primera, basta comprobar que esta ecuación general de Schrödinger implica que la norma  $\langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle$  no varía según evoluciona el tiempo y eso es un cálculo similar al de la conservación de la probabilidad que ahora se vuelve más sintético con la nueva notación (para mayor brevedad omitimos la dependencia en  $t$ ):

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \Psi | \Psi \rangle = \langle -i\hbar \frac{d}{dt} \Psi | \Psi \rangle + \langle \Psi | i\hbar \frac{d}{dt} \Psi \rangle = -\langle H\Psi | \Psi \rangle + \langle \Psi | H\Psi \rangle$$

y ambos términos se cancelan porque  $H(t)$  es autoadjunto, los dos son  $\langle \Psi | H | \Psi \rangle$ . Más adelante diremos algo acerca de la implicación contraria entre ambas formulaciones.

Ahora viene el postulado de la discordia. Lo que ni Einstein ni Schrödinger creyeron nunca y la principal razón por la que la física cuántica es tan extraña. Está relacionado con el *gato de Schrödinger* [3], del que seguro que habrás oído hablar porque es omnipresente en la divulgación actual (a pesar de que inicialmente apenas recibió atención entre los físicos y mucho menos entre el gran público). En realidad Schrödinger no inventó ese experimento mental de un gato en un estado superpuesto vivo-muerto para ilustrar la física cuántica, como se hace ahora, sino para indicar que tenía que haber algo erróneo.

La primera parte del postulado explica cómo asignar probabilidades a una medición, generalizando la regla de Born a mediciones que no sean de la posición, mientras que la segunda parte indica qué ocurre tras tal medida. Es esto último lo que resulta increíble. Sigamos la notación antes introducida para la partícula libre en la circunferencia y supongamos que su estado es

$$|\Psi\rangle = \frac{2}{7} |-1\rangle + \frac{6}{7} |1\rangle + \frac{3}{7} |3\rangle.$$

Está normalizado, pues  $\frac{2^2}{7^2} + \frac{6^2}{7^2} + \frac{3^2}{7^2} = 1$ . Sabemos que  $|n\rangle$  tiene momento  $p_n = \frac{2\pi\hbar n}{L}$  y energía  $E_n = \frac{2\pi^2\hbar^2 n^2}{mL^2}$ . Así pues, en cierto modo,  $|\Psi\rangle$  tiene tres momentos y dos energías. Un paralelismo con la regla de Born lleva a suponer las probabilidades proporcionales a las intensidades (las amplitudes al cuadrado). Es decir, detectamos los momentos  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$  con probabilidades  $\frac{2^2}{7^2}$ ,  $\frac{6^2}{7^2}$  y  $\frac{3^2}{7^2}$ , respectivamente. Si el aparato de medida que usamos solo es capaz de discriminar entre momentos negativos y positivos, obtendríamos negativo con probabilidad  $\frac{2^2}{7^2}$  y positivo con probabilidad  $\frac{6^2}{7^2} + \frac{3^2}{7^2}$ . De la misma forma, la energía será  $E_1$  con probabilidad  $\frac{2^2}{7^2} + \frac{6^2}{7^2}$  y  $E_3$  con probabilidad  $\frac{3^2}{7^2}$ . Matemáticamente se puede modelar la situación diciendo que proyectamos sobre el espacio de objetos que medimos y calculamos la norma.

Lo que resulta difícil de creer es que después de medir se suspende abruptamente la evolución por el Postulado 2 y el estado se convierte instantáneamente en la proyección sobre el espacio correspondiente a la medición. Por ejemplo, si para el estado anterior medimos energía  $E_1$ , el proceso sería

$$|\Psi\rangle \xrightarrow{\text{medición}} \frac{2}{7} |-1\rangle + \frac{6}{7} |1\rangle \sim \frac{2}{\sqrt{40}} |-1\rangle + \frac{6}{\sqrt{40}} |1\rangle \quad (\text{normalización}).$$

Es decir, tras medir  $E_1$  el estado se transforma en otro estado que de verdad tiene energía  $E_1$  sin ambigüedad. Hay un paso discontinuo de  $\frac{2}{7}|-1\rangle + \frac{6}{7}|1\rangle + \frac{3}{7}|3\rangle$  a  $\frac{2}{\sqrt{40}}|-1\rangle + \frac{6}{\sqrt{40}}|1\rangle$ . Antes de la medición de la energía, medir momento  $p_3$  tenía probabilidad  $\frac{3^2}{7^2}$  y después de ella tiene probabilidad nula. De la misma forma, la probabilidad de medir momento  $p_1$  se ha incrementado de  $\frac{6^2}{7^2}$  a  $\frac{6^2}{40} = \frac{9}{10}$ .

La versión incluida aquí del enunciado postulado contempla las llamadas *mediciones proyectivas*, aunque hay otras de tipo más general y abstracto, que tienen cierta utilidad, por ejemplo, en computación cuántica. Es habitual en física identificar constantes de  $\mathbb{C}$  con múltiplos del operador identidad cuando no hay posibilidad de confusión. Por eso en el enunciado hay que interpretar 1 como Id.

**Postulado 3.** Una medición es un conjunto de proyecciones ortogonales  $P_m$  con  $\sum_m P_m = 1$  donde  $m$  parametriza el resultado de la medición que se asocia a la imagen de  $P_m$ . La probabilidad de que al medir un estado normalizado  $|\alpha\rangle$  se obtenga  $m$  es  $p(m) = \langle \alpha | P_m | \alpha \rangle$  y al hacer la medición el estado se transforma inmediatamente en el estado  $\frac{P_m |\alpha\rangle}{\sqrt{p(m)}}$ .

Dos observaciones encadenadas sencillas, pero relevantes, son que  $\langle \alpha | P_m | \alpha \rangle$  es lo mismo que la norma de  $P_m |\alpha\rangle$  porque las proyecciones ortogonales son autoadjuntas y satisfacen, como todas las proyecciones,  $P_m^2 = P_m$ , además, la única razón para dividir en el estado transformado por  $\sqrt{p(m)}$  es que el resultado esté normalizado.

A veces se llama al postulado anterior *postulado de Born* porque, en cierto modo generaliza la regla de Born. Si las mediciones son 1 si la partícula está en  $I = [a, b]$  y cero si no lo está, los operadores  $P_1(\Psi) = \chi\Psi$  y  $P_2(\Psi) = (1 - \chi)\Psi$  con  $\chi$  la función característica de  $I$  son proyecciones en los subespacios de funciones que se anulan en  $\mathbb{R} - I$  y en  $I$ , respectivamente. Obviamente  $P_1 + P_0 = 1$  y la probabilidad de medir 1, esto es, de medir una posición perteneciente al intervalo  $I$ , es  $\langle \Psi | P_1 | \Psi \rangle = \int_a^b |\Psi|^2$ .

Una formulación alternativa muy común del postulado es a través de operadores. En este contexto a los operadores autoadjuntos, como ya se ha mencionado, se les llama *observables*. Finjamos que todo funciona como en dimensión finita para poder apelar a nuestros conocimientos de álgebra lineal. Según estos, los operadores autoadjuntos diagonalizan en una base ortonormal. En fórmulas, el observable, digamos  $A$ , se escribe como

$$A = \sum_n \lambda_n |v_n\rangle \langle v_n| \quad \text{con} \quad \{|v_n\rangle\}_n \text{ base ortonormal.}$$

La notación de Dirac está representado que  $|v_n\rangle$  es un autovector con autovalor  $\lambda_n$ , pues  $|v_n\rangle \langle v_n | v_m \rangle$  es  $|v_n\rangle$  si  $n = m$  y cero en otro caso. El hecho de que formen una base ortonormal de todo el espacio implica  $\sum_n |v_n\rangle \langle v_n| = 1$ , esto es sencillo una vez que uno entiende la notación. Por otro lado, para cada subconjunto  $S$  de autovectores  $\sum_{n \in S} |v_n\rangle \langle v_n|$  será la identidad en el subespacio generado por  $S$ . Precisamente, definirá una proyección ortogonal sobre él. De esta forma, si agrupamos los autovalores iguales, tendremos

$$A = \sum_j \mu_j P_{\mu_j} \quad \text{con} \quad P_{\mu_j} = \text{proyección ortogonal sobre el autoespacio de } \mu_j.$$

En definitiva, el postulado anterior se puede reformular diciendo que siempre medimos autovalores de observables y el estado colapsa en la proyección sobre los autoespacios. Este esquema conecta con la idea que ya había aparecido de que los valores de la energía de una partícula bajo un potencial son los autovalores de  $\hat{H}$ .

La formalización matemática con operadores está lejos de ser sencilla [11, §2.4] porque la *teoría espectral*, algo así como la teoría de autovalores y autovectores, está llena de casos patológicos en dimensión infinita. Por ejemplo, en rigor matemático diríamos que el operador  $\hat{x}$  no tiene autovalores ni autofunciones porque no hay ninguna función no idénticamente nula que multiplicada por  $x$  dé lo mismo que multiplicarla por una constante. Sin embargo, un físico admite como autofunciones deltas de Dirac para así salvar la representación

$$\hat{x} = \int_{\mathbb{R}} \lambda |\delta_\lambda\rangle \langle \delta_\lambda| d\lambda \quad \text{con} \quad \delta_\lambda(x) = \delta(x - \lambda).$$

Utilizando que, formalmente, la delta de Dirac (introducida en [9, §15]) al ser integrada contra una función da su valor en cero, tenemos (siempre procediendo formalmente) que cuando la expresión anterior actúa sobre una función de ondas  $\Psi$  con el tiempo fijado

$$\hat{x}(\Psi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda \delta_\lambda(x) \int_{\mathbb{R}} \delta(u - \lambda) \Psi(u) du d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \lambda \delta(x - \lambda) \Psi(\lambda) d\lambda = x\Psi(x)$$

Las *distribuciones* que quizá hayas estudiado en un curso de análisis, permiten dar sentido a los cálculos con deltas de Dirac, pero en física se hacen pocos remilgos a que no sean estrictamente funciones y a que su cuadrado no sea “integrable”. Si uno intentase justificar con detalle todo, se perdería la esencia de lo que se quiere transmitir<sup>1</sup>.

El cambio abrupto de un estado tras la medición se llama *colapso de la función de onda* y lo que recoge el postulado es el núcleo de la llamada *interpretación de Copenhague* (el origen del nombre es incierto, parece que se debe a Heisenberg alrededor de 1955). La actitud de muchos físicos actuales es aceptar que esto funciona y es útil y no preocuparse demasiado por ir más allá. A este respecto, se cita la frase “*Shut up and calculate!*” atribuida a menudo a R. Feynman. En realidad no es suya sino de N. D. Mermin, un físico del estado sólido, quien dijo en una entrevista *If I were forced to sum up in one sentence what the Copenhagen interpretation says to me, it would be “Shut up and calculate!”*. Sí es de Feynman otra más lapidaria: *I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics.*

Aparte de que ni Einstein ni Schrödinger creyeran en el colapso de la función de ondas, el hecho inquietante es que hay algo físicamente dudoso en la interpretación de Copenhague porque dota a las bases de la física cuántica de una ambivalencia que no está claro que no sea inconsistente. Es el llamado *problema de la medición* que ha sido motivo de discusión desde los primeros tiempos hasta la actualidad [11, Ap.E], [14, Ch.19], [2], [15] (eso no quita para que uno pueda leer en algunas fuentes serias que el problema no existe o que ya ha sido resuelto). Por un lado la función de onda caracteriza a un sistema cuántico de manera determinista, con una

<sup>1</sup>Por ejemplo, en el libro básico [22, §3.5] después de escribir (adaptando la notación) que una autofunción de  $\hat{x}$  requiere resolver  $(x - \lambda)\Psi(x) = 0$  toda la explicación que se da es “La única solución de esa ecuación es proporcional a la delta de Dirac”. Posiblemente es suficiente para que lo entienda un estudiante de física y para producirle picazón a uno de matemáticas.

ecuación que dadas unas condiciones iniciales evoluciona de manera matemáticamente precisa (Postulado 2), mientras que por otro lado, con el colapso de la función de onda, también se postula que esa regla se rompe cuando medimos, modificándose de manera instantánea la evolución. Pero, ¿qué es una *medición*? (como se sugiere en [2], un nombre más propio sería *experimento*). ¿Cómo sabe un sistema cuántico que está siendo medido para modificarse instantáneamente? ¿Por qué se transforma esencialmente en lo que se quiere medir? ¿El colapso se produce cuando el observador percibe la medición? ¿Si alguien mide y no se lo cuenta a nadie, el estado no cambia para el resto del mundo? Cuestiones de este tipo han hecho correr ríos de tinta.

Por decirlo de una manera más precisa tomada de la versión española de [11]

*[...] algo emerge con claridad: a pesar del indudable e impresionante éxito de las predicciones de la Mecánica Cuántica, todavía no sabemos con exactitud cómo y cuándo el régimen evolutivo dado por la ecuación de Schrödinger da paso al colapso y, por tanto, carecemos de una formulación completa e inambigua de nuestra teoría física más fundamental.*

El mismo tipo de pesimismo aparece en este fragmento de [16, §I.1] (también, de su versión española) que refleja los efectos de separar la física de un sistema de la metafísica de la individualidad del observador:

*En la mecánica cuántica se entiende por medición todo proceso de interacción entre objetos clásicos y cuánticos que ocurre independientemente de cualquier observador [...]*

*De esta forma, la mecánica cuántica ocupa una posición muy original en el conjunto de teorías físicas: contiene la mecánica clásica como límite suyo, y al mismo tiempo tiene necesidad de este caso límite para su propia fundamentación.*

Por añadir algo positivo, desde hace unos 40 años, la explicación que parece estarse volviendo mayoritaria es la llamada *decoherencia cuántica*. Esencialmente lo que postula es que es la acción del entorno la que provoca el colapso. Los objetos macroscópicos evolucionan rápidamente a un estado clásico porque no puede aislarse de la interacción con el resto del universo. De esta forma, el aparente colapso se debe a que no se está considerando la función de ondas correspondiente a todas las partículas que participan en el proceso de medida.

Pasamos al último postulado, que requiere el concepto de *producto tensorial* de espacios vectoriales. Si no lo conoces, como solución de urgencia después de su enunciado hay un ejemplo que trata de explicar la idea. Más adelante en el curso veremos una definición precisa.

**Postulado 4.** *El espacio de Hilbert correspondiente a un sistema cuántico aislado compuesto es el producto tensorial de los espacios correspondientes a cada una de sus componentes.*

Seguro que estás acostumbrado al producto cartesiano con el que  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^5$  o, en el caso complejo,  $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^5$ , pero en algunas situaciones convendría la dimensión del “producto” de dos espacios vectoriales fuera el producto de las dimensiones.

Supongamos que en el caso de la partícula libre en la circunferencia tenemos un estado normalizado tal que  $a_j = 0$  para  $j \notin \{1, 2\}$ . La función de ondas para  $t = 0$  sería de la forma

$$\Psi_1 = a_1\psi_1 + a_2\psi_2 \quad \text{con} \quad |a_1|^2 + |a_2|^2 = 1.$$

Con la notación anterior,  $|\Psi_1\rangle = a_1|1\rangle + a_2|2\rangle$  y está claro que  $|\Psi_1\rangle$  pertenece a un espacio vectorial de dimensión 2 isomorfo a  $\mathbb{C}^2$ , basta identificar el estado con sus coeficientes. Si en otra circunferencia de longitud  $L'$  tenemos otra partícula que solo involucra las energías  $E'_k$  con  $k \in \{1, 2, 3\}$ , la función de ondas para  $t = 0$  sería, denotando con  $\phi_j$  las  $\psi_j$  con la nueva longitud, de la forma:

$$\Psi_2 = b_1\phi_1 + b_2\phi_2 + b_3\phi_3 \quad \text{con} \quad |b_1|^2 + |b_2|^2 + |b_3|^2 = 1$$

que pertenece a un espacio isomorfo a  $\mathbb{C}^3$ . Por la probabilidad de la intersección de sucesos independientes, parece natural considerar que la probabilidad de medir que la primera partícula tenga energía  $E_j$  y la segunda  $E'_k$  debe ser  $|a_j|^2|b_k|^2$ , que respecta la normalización pues  $\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^3 |a_j|^2|b_k|^2 = 1$ . Esto sugiere que la función de ondas del sistema de las dos partículas en  $t = 0$  es una función de dos variables de la forma

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) = & a_1b_1\psi_1(x)\phi_1(y) + a_1b_2\psi_1(x)\phi_2(y) + a_1b_3\psi_1(x)\phi_3(y) \\ & + a_2b_1\psi_2(x)\phi_1(y) + a_2b_2\psi_2(x)\phi_2(y) + a_2b_3\psi_2(x)\phi_3(y) \end{aligned}$$

que está en un espacio vectorial de dimensión 6 generado por  $\psi_j(x)\phi_k(y)$  el cual hereda el producto escalar de cada trozo del sistema definiendo  $\langle \psi_j\phi_k | \psi_{j'}\phi_{k'} \rangle = \langle \psi_j | \psi_{j'} \rangle \langle \phi_k | \phi_{k'} \rangle$ . Justamente, este espacio vectorial es el producto tensorial de los espacios donde viven los estados de cada partícula por separado.

Los postulados anteriores no deben dar la idea de que las matemáticas preceden a la física. El propio desarrollo del análisis funcional estuvo muy ligado a la física cuántica y von Neumann trató algunos problemas sobre operadores con esta motivación [4, §18]. Una ilustración de la interrelación entre física cuántica y análisis funcional, así como de las diferentes visiones, es la siguiente anécdota de K. Friedrichs (un matemático con un papel destacado en el desarrollo del análisis funcional) y Heisenberg recogida en [17, p. 414]<sup>2</sup>:

*En la década de 1960, Friedrichs conoció a Heisenberg y aprovechó la ocasión para expresarle la profunda gratitud de los matemáticos por haber creado la mecánica cuántica, que dio origen a la hermosa teoría de los operadores en espacios de Hilbert. Heisenberg admitió que así era; Friedrichs añadió entonces que los matemáticos, en cierta medida, le habían devuelto el favor. Heisenberg se mostró evasivo, por lo que Friedrichs señaló que fue un matemático, von Neumann, quien aclaró la diferencia entre un operador autoadjunto y uno que es meramente simétrico. “¿Cuál es la diferencia?”, preguntó Heisenberg.*

No hay que dotar a los postulados una rigidez similar a la de los axiomas matemáticos. Simplemente constituyen un marco en el que trabajar que en la educación universitaria se va aprendiendo al tiempo que se practica. Muchos textos de tal ámbito ni siquiera los establecen, mientras que en un texto de matemáticas resultaría impensable enunciar y probar un teorema sin haber introducido las definiciones concretas y las herramientas para hacerlo.

<sup>2</sup>Para justificación de Friedrichs y de Heisenberg, la diferencia mencionada es sutil, aunque muy natural para un matemático que se enfrenta a los operadores de la mecánica cuántica, y relacionado con el trabajo del propio Friedrichs. Radica en que, por ejemplo, el operador hamiltoniano de la sección anterior contiene una derivada segunda, mientras que deseamos trabajar en  $L^2$  donde no es posible derivar todas las funciones.

### 3.2. El principio de incertidumbre

Ya sabemos que un observable puede dar lugar a infinidad de mediciones para un mismo estado. En el mundo macroscópico lo que ocurre es que tales mediciones tienen muy poca variabilidad por la pequeñez de la constante de Planck. Si consideramos que una partícula tiene cierto momento lineal  $p_0$  en el mundo clásico, desde el punto de vista cuántico podemos considerar que en su función de ondas las longitudes de onda distintas de  $h/p$  están muy atenuadas. Esto lleva a definir para un estado fijado  $|\Psi\rangle$  la *varianza* de un observable  $A$  como

$$\sigma_A^2 = \|(A - \langle A \rangle)\Psi\|^2 = \langle \Psi | (A - \langle A \rangle)^2 | \Psi \rangle = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle \quad \text{donde} \quad \langle A \rangle = \langle \Psi | A | \Psi \rangle.$$

Es decir,  $\langle A \rangle$  desempeña el papel de la esperanza en estadística. Igual que en esta área, no es difícil comprobar  $\sigma_A^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$ . Seguimos a [13] en esta notación estadística, aunque es más común ver en la literatura  $\Delta A$  en lugar de  $\sigma_A$  que, naturalmente, es la raíz cuadrada de  $\sigma_A^2$  y correspondería a la desviación típica.

El principio de incertidumbre afirma que hay un límite para las varianzas simultáneas de posición y momento. A pesar del merecido reconocimiento que tiene en los fundamentos de la mecánica cuántica, lo cierto es que, incluso en una forma muy general, es una consecuencia rápida de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Como ya observaron los pioneros Heisenberg, Born y Jordan, la clave está en la no conmutatividad del producto (composición) de operadores, que para ellos eran matrices infinitas.

Antes de demostrarlo, debemos recordar que el *conmutador* de dos operadores  $A$  y  $B$  se define como el operador

$$[A, B] = AB - BA.$$

Expresiones de este tipo, que son omnipresentes en mecánica cuántica, ya han aparecido antes en el teorema de Ehrenfest y, en cierto modo trivial, en la conservación de la probabilidad.

Dados dos observables  $A$  y  $B$ , lo que afirma el *principio de incertidumbre generalizado* es

$$\sigma_A \sigma_B \geq \frac{1}{2} |\langle C \rangle| \quad \text{con} \quad C = i[A, B].$$

La conclusión es que la falta de conmutatividad es un obstáculo para obtener medidas simultáneas exactas, de varianza cero, como en el caso clásico.

Nótese que como  $A$  es autoadjunto,  $\langle A^2 \rangle$  es lo mismo que la norma de  $A|\Psi\rangle$  y, entonces, la desigualdad de Cauchy-Schwarz implica

$$\langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle \geq |\langle A\Psi | B\Psi \rangle|^2 \geq |\Im(\langle A\Psi | B\Psi \rangle)|^2$$

con  $\Im$  indicando la parte imaginaria. Está claro que  $2i\Im(\langle \alpha | \beta \rangle) = \langle \alpha | \beta \rangle - \langle \beta | \alpha \rangle$ , por tanto,

$$-2\Im(\langle A\Psi | B\Psi \rangle) = i\langle AB \rangle - i\langle BA \rangle = \langle C \rangle$$

donde se ha empleado de nuevo que  $A$  y  $B$  son autoadjuntos.

Si ahora sustituimos en la desigualdad anterior y cambiamos  $A$  por  $A - \langle A \rangle$  y  $B$  por  $B - \langle B \rangle$ , el operador  $C$  queda invariante y extrayendo raíces cuadradas (nótese que  $\langle C \rangle$  es real) se obtiene el resultado esperado.

Para  $A = \hat{x}$  y  $B = \hat{p}$ , recordemos que definido como  $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ , un sencillo cálculo lleva a la *relación de incertidumbre de Heisenberg* (donde  $i\hbar$  indica esta constante por el operador identidad)

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

que implica el *principio de incertidumbre de Heisenberg*

$$\sigma_{\hat{x}} \sigma_{\hat{p}} \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Muchas veces se interpreta esta desigualdad diciendo que las mediciones perturban el sistema. Tal interpretación procede del propio Heisenberg, pero la aséptica prueba anterior no muestra nada asociado al llamado “efecto del observador”. Todavía más, recientes experimentos [20] muestran que dicha interpretación es, además de confusa, dudosa.

Un curioso resultado de von Neumann [17, §3.5.6] muestra que posición y momento son los “únicos operadores”, en cierto sentido matemático, que satisfacen la relación de incertidumbre de Heisenberg.

Recordemos que el momento tenía que ver con la longitud de onda, siguiendo esa idea, es posible entender el principio de incertidumbre de Heisenberg como un resultado de análisis de Fourier (véase [10] para una demostración en esas líneas) que no es intrínseco de la mecánica cuántica y que se manifiesta en diversas aplicaciones a la ingeniería [6, §1.2.3]. La idea es que utilizando ondas de longitud de onda  $\lambda$  estamos abocados a saltarnos los detalles de tamaño  $\lambda$ . En términos matemáticamente más familiares, si tenemos una serie de Fourier y truncamos las frecuencias hasta cierto límite  $N$ , entonces el efecto típico es que la gráfica de la función se vuelve “borrosa” en cuanto a los detalles de tamaño comparable a  $N^{-1}$ .

Hay otro “principio de incertidumbre” en física cuántica que involucra la energía y el tiempo. A pesar de la similitud en su demostración, ni es una aplicación del anterior ni tiene la misma categoría porque el tiempo no es un observable, actúa como un parámetro que indica la evolución del sistema<sup>3</sup>.

El mismo argumento usado para probar la conservación de la probabilidad o el teorema de Ehrenfest muestra que si un observable  $Q$  no depende explícitamente del tiempo

$$\frac{d}{dt} \langle Q \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, Q] \rangle$$

donde  $H$  es el observable (ligado a la energía) que aparece en la ecuación de Schrödinger. Evidentemente, aunque  $Q$  no dependa del tiempo, el estado sí lo hace en general, por ello la derivada de  $\langle Q \rangle = \langle \Psi | Q | \Psi \rangle$  no es nula en general. Combinando esto con el principio de incertidumbre generalizado para  $Q$  y  $H$  se deduce

$$\sigma_Q \sigma_H \geq \frac{\hbar}{2} \left| \frac{d}{dt} \langle Q \rangle \right|$$

---

<sup>3</sup>Esta diferencia sustancial entre espacio y tiempos causa dificultades al intentar combinar mecánica cuántica y relatividad, que están resueltos (si uno no es demasiado puntilloso matemáticamente) en el caso de la relatividad especial, pero no en el de la general.

que reescribimos en una forma más sugestiva como

$$\delta_t \sigma_H \geq \frac{\hbar}{2} \quad \text{donde} \quad \delta_t = \frac{\sigma_Q}{\left| \frac{d}{dt} \langle Q \rangle \right|}.$$

Con nuestras definiciones,  $\sigma_H$  es la desviación típica de la energía. A pesar de que  $\delta_t$  no es la desviación típica del tiempo, porque, de nuevo, el tiempo no es un observable, sí indica cierta variación característica del tiempo del sistema para que pueda ocurrir algo “apreciable”. Representa el tiempo aproximado que debe transcurrir para que la media de la distribución de valores se desplace  $\sigma_Q$ , porque en una aproximación lineal (Taylor de orden uno), la media  $\langle Q \rangle$  tras un tiempo  $\delta_t$  pasará a ser  $\langle Q \rangle + \delta_t \frac{d}{dt} \langle Q \rangle$  que coincide con  $\langle Q \rangle \pm \sigma_Q$ .

A la desigualdad anterior se la llama a veces *incertidumbre energía tiempo*. A menudo se dice que permite que en mecánica cuántica se pueda violar la conservación de la energía siempre que se haga en un tiempo pequeño y se ilustra con la inestabilidad de algunas partículas elementales. Esta consigna tiene muchas limitaciones (y es criticada frontalmente en [13]). Un estado habitualmente tiene “varias energías”, así que para hablar de una energía y su conservación debiéramos pensar en un estado estacionario. Para ellos  $\sigma_H = 0$  y  $\frac{d}{dt} \langle Q \rangle = 0$  con lo que  $\delta_t$  no tiene sentido. Tal estado estacionario evolucionando con la ecuación de Schrödinger no admitiría un salto a otro de otra energía por muy pequeño que fuera el tiempo.

### 3.3. Exponenciales y conmutadores

A raíz del Postulado 2 y del principio de incertidumbre, han aparecido exponenciales de operadores y conmutadores. A su vez, la formulación en términos de observables del Postulado 3 destacaba el papel de los autovalores y autoespacios. Todos estos son temas recurrentes en mecánica cuántica. El problema, ya indicado, es que resulta muy difícil enunciar resultados matemáticamente rigurosos que sean aplicables a las situaciones físicas que hemos tratado. Los físicos cuánticos no son analistas funcionales y, como muestra la anécdota entre Friedrichs y Heisenberg, no debemos esperar que tengan en la cabeza un montón de teoremas y de ejemplos patológicos. Lo que los matemáticos entienden como una desventaja, lo suplen los físicos con una fuerte intuición y con la capacidad de permitir excepciones en las reglas cuando es necesario.

El principal escollo radica en la dimensión infinita, por ello en este apartado vamos a centrarnos sobre todo en dimensión finita identificando los operadores con matrices y confiando que en los casos de interés de dimensión infinita todo funcionará más o menos igual. Veremos más adelante que el caso finito no es ajeno a la física cuántica. Ya que nuestras matrices responden a endomorfismos, supondremos sin indicarlo cada vez que son cuadradas y que cuando se multipliquen dos de ellas sus dimensiones son compatibles.

Comencemos recordando la definición de la exponencial de una matriz. Simplemente se copia la definición de la exponencial de un número real o complejo por medio de la serie de Taylor:

$$\exp(A) = \text{Id} + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

Para cada elemento se tiene una serie que parece complicadísima y además no parece nada evidente que la convergencia esté garantizada (sí lo está introduciendo normas de matrices). Sin

embargo, para una matriz diagonal digamos  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , donde  $\lambda_j$  son los elementos de la diagonal, es muy fácil ver con esta definición que  $\exp(D) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$ . Si  $A$  es diagonalizable,  $A = CDC^{-1}$  (con  $D$  diagonal como antes) y calcular potencias naturales (incluso enteras) de esta expresión es sencillo:

$$A^k = CDC^{-1} \cdot CDC^{-1} \cdot \dots \cdot CDC^{-1} \cdot CDC^{-1} = CD^kC^{-1}$$

porque cada una de las matrices de  $C$  interiores se cancela con su inversa. El cálculo de  $D^k$  es trivial frente al cálculo directo de  $A^k$  que en general parece inasequible. Así pues, si  $A$  es diagonalizable  $\exp(A) = C \exp(D) C^{-1}$ .

La matriz  $A$  corresponde a un operador autoadjunto con el producto escalar usual de  $\mathbb{C}^n$  si y solo si es una *matriz hermítica*, esto es, si verifica  $A^\dagger = A$  con  $A^\dagger$  la traspuesta conjugada. En el caso real simplemente estaríamos diciendo que es simétrica. Tales matrices diagonalizan en una base ortonormal y tienen autovalores reales (este es el *teorema espectral* en dimensión finita [18]). Por consiguiente,

$$\exp(iA) = C \exp(iD) C^{-1} = C \text{diag}(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_n}) C^{-1} \quad \text{con } C \text{ unitaria.}$$

Recordemos que una matriz es *unitaria* si sus columnas forman una base ortonormal del espacio o equivalentemente si su inversa coincide con un traspuesta conjugada lo cual, a su vez, equivale a que el operador asociado conserve la norma usual. La matriz diagonal central es obviamente unitaria y las matrices unitarias forman un grupo, por tanto se concluye que si  $A$  es hermítica entonces  $\exp(iA)$  es unitaria. Por otro lado, las matrices unitarias también diagonalizan en una base ortonormal y necesariamente los autovalores tienen módulo uno porque la norma se debe conservar. Entonces, dichos autovalores se pueden escribir en la forma  $e^{i\lambda_j}$  con  $\lambda_j \in \mathbb{R}$  y el proceso anterior se puede revertir para mostrar que

$$U \text{ unitaria} \iff U = \exp(iA) \quad \text{con } A \text{ hermítica.}$$

En dimensión infinitas las cosas se complican desde el principio. A pesar de que  $\exp(A)$  tiene sentido con la serie para operadores acotados, la mayoría de los aparecen en mecánica cuántica no lo son. El *teorema de Stone* probado por M. Stone y por von Neumann muestra con gran generalidad la equivalencia entre operadores unitarios y autoadjuntos con un parámetro  $t$  que representa el tiempo, en la línea de las dos formulaciones del Postulado 2.

En relación con esto, nótese que para cualquier matriz  $A$  la definición implica

$$\frac{d}{dt} \exp(At) = A \exp(At) = \exp(At) A.$$

Lo cual permite resolver la ecuación diferencial ordinaria de tipo Schrödinger

$$i \frac{d}{dt} \vec{x}(t) = A \vec{x}(t), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0$$

como  $\vec{x}(t) = \exp(-iAt) \vec{x}_0$ . Para  $A$  hermítica se tiene  $\vec{x}(t) = U(t) \vec{x}_0$  con  $U(t)$  unitaria para cada  $t$ .

Claramente las matrices diagonales conmutan. De aquí, si dos matrices diagonalizan en la misma base entonces conmutan. Un famoso resultado de álgebra lineal (más famoso en física que

en matemáticas) muestra que el recíproco también es cierto. Esto es, *para  $A$  y  $B$  diagonalizables se cumple  $[A, B] = 0$  si y solo si existe una base en que diagonalizan simultáneamente*. Para una demostración rigurosa y rápida, véase [7].

Si  $D$  y  $D'$  son matrices diagonales,  $\exp(D)\exp(D') = \exp(D + D')$ . El resultado anterior permite extender esto al caso de matrices diagonalizables que conmutan. De hecho, la condición de ser diagonalizable no es necesaria y se tiene

$$\exp(A)\exp(B) = \exp(A + B) \quad \text{si} \quad [A, B] = 0.$$

Un caso particular es que la inversa de  $\exp(A)$  es  $\exp(-A)$ .

¿Qué ocurre si  $A$  y  $B$  no conmutan? La respuesta es que se tiene  $\exp(A)\exp(B) = \exp(C)$  donde  $C$  guarda una expresión muy complicada en términos de  $A$  y  $B$  llamada *fórmula de Baker–Campbell–Hausdorff*. Tal fórmula es de escasa utilidad en cálculos prácticos porque viene dada por una suma infinita que ni siquiera está claro que converja. La mayor parte de las veces se aplica a matrices con propiedades especiales o en aproximaciones de cierto orden. Respecto a esto último, por ejemplo,

$$\exp(At)\exp(Bt) = \exp(Ct) \quad \text{con} \quad C = A + B + \frac{t}{2}[A, B] + \text{términos de orden superior en } t.$$

Si  $t$  es suficientemente pequeño los términos de orden superior son despreciables y se tiene  $\exp(At)\exp(Bt) \approx \exp((A + B)t + \frac{t^2}{2}[A, B])$ . De esta forma, el conmutador también mide, de alguna forma, en cuánto falla la identidad  $\exp(A)\exp(B) = \exp(A + B)$  que es cierta para números pero no, en general, para matrices u operadores.

La exponencial se comporta bien respecto a tomar adjuntos,  $\exp(A)^\dagger = \exp(A^\dagger)$ , porque está definida con una serie real. Para el operador  $e^{-iHt/\hbar}$  del segundo postulado,  $e^{iHt/\hbar}$  es su inverso y también su adjunto, lo que refleja que es unitario.

Recordemos que la *traza* de una matriz se define como la suma de los elementos de la diagonal principal. Una propiedad fundamental es que  $\text{Tr}([A, B]) = 0$ , donde  $\text{Tr}$  es la notación para la traza. Recordando la relación de incertidumbre de Heisenberg, no es de extrañar que Born, Heisenberg y Jordan tuvieran que considerar matrices infinitas para representar posiciones y momentos. De la propiedad de la traza en la forma  $\text{Tr}(CDC^{-1} - C^{-1}CD) = 0$  se deduce que para  $A$  diagonalizable  $\text{Tr}(A)$  es igual a la suma de los autovalores repetidos con sus multiplicidades (lo cual abre la puerta para dar sentido a la traza en dimensión infinita).

Con las definiciones y observaciones anteriores es fácil ver que para  $A$  diagonalizable

$$\det \exp(A) = e^{\text{Tr}(A)}.$$

La igualdad se extiende también (por ejemplo, con un argumento de continuidad) a matrices no diagonalizables. En física a veces se emplea esta relación para dar sentido al determinante de algunos operadores en dimensión infinita.

Los conmutadores y las exponenciales participan en lo que se llama *imagen de Heisenberg* de la mecánica cuántica. Ya hemos visto que Schrödinger caracterizaba los estados con una función de ondas que contiene al tiempo como un parámetro que representa su evolución. En

los primeros artículos de mecánica cuántica (en su versión matricial), Heisenberg consideraba que eran los operadores los que dependían del tiempo actuando sobre un estado inicial.

Matemáticamente, podemos decir que los estados  $|\Psi\rangle_S$  de la llamada *imagen de Schrödinger* y los  $|\Psi\rangle_H$  de la imagen de Heisenberg están relacionados por  $|\Psi\rangle_S = e^{-iHt/\hbar} |\Psi\rangle_H$ . En palabras,  $|\Psi\rangle_S$  es lo que resulta al dejar evolucionar con la ecuación de Schrödinger la condición inicial  $|\Psi\rangle_H$ . Con este “cambio de base” los observables de Schrödinger y Heisenberg se relacionan por medio de

$$e^{iH_S t/\hbar} A_S e^{-iH_S t/\hbar} = A_H$$

donde  $H_S$  es el operador hamiltoniano, el observable de energía, en la imagen de Schrödinger. Para simplificar, supongamos que  $A_S$  no depende explícitamente del tiempo. Obviamente,  $A_H$  sí lo hará en general, y al derivar se obtiene

$$\frac{d}{dt} A_H(t) = \frac{i}{\hbar} e^{iH_S t/\hbar} H_S A_S e^{-iH_S t/\hbar} - \frac{i}{\hbar} e^{iH_S t/\hbar} A_S H_S e^{-iH_S t/\hbar}.$$

Unas manipulaciones adicionales llevan a la *ecuación de movimiento de Heisenberg*

$$\frac{d}{dt} A_H(t) = \frac{i}{\hbar} [H_H(t), A_H(t)].$$

Lo bueno de esta ecuación es que es el análogo de otra de la mecánica clásica. Al igual que el teorema de Ehrenfest (que se obtiene de esta ecuación tomando promedios), permite trasvasar intuición clásica al mundo cuántico. Por ejemplo, para una partícula libre  $H_H = \hat{p}_H^2(t)/(2m)$  y la ecuación para el operador posición  $\hat{x}_H(t)$  implica

$$\frac{d}{dt} \hat{x}_H(t) = \frac{\hat{p}_H(t)}{m}$$

que quitando los “adornos” a la notación es la relación clásica trivial  $\dot{x} = mv/m$ .

### Ejercicios de la sección 3

**EJERCICIO 1.** Explica por qué  $|\alpha\rangle = \sum_j \lambda_j |j\rangle$  con  $\lambda_j \in \mathbb{C}$  implica  $\langle\alpha| = \sum_j \lambda_j^* \langle j|$ . Explica también por qué si  $A$  y  $B$  son observables entonces  $i[A, B]$  lo es mientras que  $[A, B]$  no lo es, excepto cuando se anula.

**EJERCICIO 2.** Sean  $|a\rangle$  y  $|b\rangle$  dos estados ortonormales. En el espacio que generan consideramos el operador  $2 + |\alpha\rangle \langle\beta|$  donde  $|\alpha\rangle = -|a\rangle + (2-i)|b\rangle$  y  $|\beta\rangle = i|a\rangle + |b\rangle$ . Halla sus autovalores. ¿Cambia, en general, el resultado si no son ortonormales? **Indicación:** Recuerda que en física cuántica se suelen representar los múltiplos de la identidad con números, así 2 significa  $2\text{Id}$ .

**EJERCICIO 3.** Demuestra que el único observable  $T$  que cumple  $\langle x|T|x\rangle = 0$  para todo  $|x\rangle$  es  $T = 0$ . Comprueba que hay contraejemplos en espacios de Hilbert sobre  $\mathbb{R}$ . **Indicación:** Para la primera parte, prueba la identidad  $\langle x|T|y\rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^{-k} \langle z_k|T|z_k\rangle$  con  $|z_k\rangle = |x\rangle + i^k |y\rangle$ . Para la segunda, considera  $\mathbb{R}^2$  con el producto escalar usual.

EJERCICIO 4. El espacio de Hilbert que modela el momento magnético del electrón en reposo es  $\mathbb{C}^2$  con el producto escalar  $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = v_1^* w_1 + v_2^* w_2$ . Su evolución bajo un campo magnético con inducción magnética  $\vec{B} \in \mathbb{R}^3$  viene dada por

$$\frac{d|\Psi\rangle}{dt} = \frac{i\gamma}{2} \left( B_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + B_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + B_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) |\Psi\rangle$$

donde  $\gamma$  es una constante real (la *constante giromagnética* del electrón). Identifica el operador  $H(t)$  en la formulación con operadores del segundo postulado y comprueba que es auto-ajunto. Sabiendo que  $\dim \gamma = \text{M}^{-1}\text{Tl}$ , halla  $\dim B_j$ .

EJERCICIO 5. Calcula la solución general de la ecuación del ejercicio anterior cuando  $B_1 = B_3 = 0$  y  $B_2$  es constante. Si  $H$  es el operador correspondiente a esta situación, calcula  $e^{-itH/\hbar}$  y utilízalo para dar una solución alternativa (si lo has hecho de otra forma).

EJERCICIO 6. Abreviemos en el pozo de potencial infinito  $|n\rangle = e^{-iE_n t/\hbar} \psi_n(x)$ . Imaginemos un aparato que mide la energía  $E$  dando solo tres valores: cero si  $E < E_{10}$ , uno si  $E \in [E_{10}, E_{30})$  o dos si  $E \geq E_{30}$ . Al medir el estado  $\frac{4}{21}|5\rangle + \frac{3}{21}|20\rangle + \frac{4}{21}|23\rangle + \frac{20}{21}|50\rangle$ , ¿cuál es la probabilidad de obtener uno y en qué estado (normalizado) se transformará tras esa medición?

EJERCICIO 7. Demuestra que si  $Q$  es un observable que depende explícitamente del tiempo entonces

$$\frac{d}{dt} \langle Q \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, Q] \rangle + \left\langle \frac{\partial Q}{\partial t} \right\rangle.$$

EJERCICIO 8. Comprueba la identidad  $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ .

EJERCICIO 9. Comprueba  $[\hat{x}^n, \hat{p}] = i\hbar n \hat{x}^{n-1}$ . En general, halla  $[\hat{f}, \hat{p}]$  donde  $f$  es una función arbitraria de  $x$ . Utiliza el resultado para escribir un principio de incertidumbre para los observables momento y  $\sin \hat{x}$ .

EJERCICIO 10. Generaliza todavía más el ejercicio anterior hallando  $[A^n, B]$  para cualquier par de operadores tales que  $[A, B] = i\lambda$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

EJERCICIO 11. Supongamos que el espacio de Hilbert subyacente es  $L^2(\mathbb{R})$  (o si lo prefieres, restringete a la clase de Schwartz). Prueba que el operador  $T = e^{-i\lambda \hat{p}/\hbar}$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ , llamado *operador de traslación* cumple  $T^\dagger \hat{x} T = \hat{x} + \lambda$ . Indicación: Apelando al análisis de Fourier, es suficiente comprobar su acción sobre  $\varphi(x) = e^{2\pi i \xi x}$ .

EJERCICIO 12. Sea  $F(t) = e^{tA} B e^{-tA}$  donde  $[A, B] = c$  con  $c$  constante. Prueba que  $F'(t) = c$  y deduce  $F(t) = B + ct$ . Utiliza este resultado para dar una solución rápida al ejercicio anterior.

## Referencias

- [1] S. Baselga Moreno. *Dirac. La belleza matemática*. Nivola libros y ediciones, 2008.

- [2] J. Bell. Against ‘measurement’. *Physics World*, August:33–41, 1990.
- [3] M. L. Bhaumik. Is Schrödinger’s cat alive? *Quanta*, 6(1):70–80, 2017.
- [4] G. Birkhoff and E. Kreyszig. The establishment of functional analysis. *Historia Math.*, 11(3):258–321, 1984.
- [5] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.
- [6] F. Chamizo. A course on signal processing. [https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/fich/signal\\_processing.pdf](https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/fich/signal_processing.pdf), 2020.
- [7] K. Conrad. Simultaneous commutativity of operators. <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/linmultialg/simulcomm.pdf>, 2026.
- [8] P. A. M. Dirac. A new notation for quantum mechanics. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 35:416–418, 1939.
- [9] P. A. M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford, at the Clarendon Press, 1947. 3d ed.
- [10] H. Dym and H. P. McKean. *Fourier series and integrals*. Probability and Mathematical Statistics, No. 14. Academic Press, New York-London, 1972.
- [11] A. Galindo and P. Pascual. *Quantum mechanics. I*. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1990. Translated from the Spanish by J. D. García and L. Alvarez-Gaumé.
- [12] D. V. Galtsov, Iu. V. Grats, and V. C. Zhukovski. *Campos clásicos: enfoque moderno*. Editorial URSS, 2005.
- [13] D. J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics (2nd Edition)*. Pearson Prentice Hall, 2nd edition, 2004.
- [14] K. Konishi and G. Paffuti. *Quantum Mechanics: A New Introduction*. Oxford University Press, 03 2009.
- [15] F. Laloë. *Do we really understand quantum mechanics?* Cambridge University Press, Cambridge, 2012. With a foreword by C. Cohen-Tannoudji.
- [16] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Quantum mechanics: non-relativistic theory. Course of Theoretical Physics, Vol. 3*. Addison-Wesley Series in Advanced Physics. Pergamon Press, Ltd., London-Paris; Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, MA, 1958. Translated from the Russian by J. B. Sykes and J. S. Bell.
- [17] P. D. Lax. *Functional analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2002.

- [18] P. D. Lax. *Linear algebra and its applications*. Pure and Applied Mathematics (Hoboken). Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], Hoboken, NJ, second edition, 2007.
- [19] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [20] L. A. Rozema, A. Darabi, D. H. Mahler, A. Hayat, Y. Soudagar, and A. M. Steinberg. Violation of Heisenberg's measurement-disturbance relationship by weak measurements. *Phys. Rev. Lett.*, 109:100404, Sep 2012.
- [21] J. von Neumann. *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2018. New edition. Translated from the German and with a preface by R. T. Beyer, Edited and with a preface by N. A. Wheeler.
- [22] F. J. Ynduráin. *Mecánica cuántica*. Alianza Universidad Textos, 1988.