# Introducción histórica

Seminario: Introducción a la física cuántica    segundo semestre 2025–2026

Fernando Chamizo    https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/

Las ecuaciones diferenciales dominaban los métodos matemáticos de la física a finales del siglo XIX y todavía los dominan hoy, aunque se han introducido nuevos ingredientes entonces insospechados. La física cuántica surgió cuando ciertos fenómenos cuánticos se comportaban "a saltos", escapando de la suavidad que requieren las derivadas.

## 1.1. Unidades y constantes

En la vida cotidiana es natural manejar diferentes unidades dependiendo del contexto. Por ejemplo, a nadie se le ocurriría indicar la edad de un adulto en días o su peso en toneladas. También hay variaciones locales, aunque cada vez menos acusadas (por ejemplo, los grados *Fahrenheit* prácticamente ya solo se emplean en Estados Unidos).

A pesar de que también en física el contexto ha multiplicado las unidades, el *Sistema Internacional*, abreviado SI, ha alcanzado gran éxito unificando y universalizando. Un sistema de unidades solo tiene sentido cuando hay magnitudes físicas que medir. Seguro que se te pasan por la mente el espacio y el tiempo como las más fundamentales y quizá también la masa. El Sistema Internacional reconoce siete magnitudes básicas con sus unidades. El resto se construyen a partir de ellas. La siguiente tabla recoge las cuatro que aparecerán en el curso, las tres antes mencionadas y otra relacionada con los fenómenos electromagnéticos:

| **Magnitud** | **Unidad** | **Símbolo** | **Dimensión** |
|---|---|---|---|
| espacio | metro | $m$ | L |
| tiempo | segundo | $s$ | T |
| masa | kilogramo | $kg$ | M |
| corriente | amperio | $A$ | I |

No necesitamos nuevas unidades para la velocidad o la aceleración porque las fórmulas

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad \text{y} \qquad a = \frac{d^2s}{dt^2}$$

con $s = s(t)$ el espacio muestran que la *velocidad* se mide en $m/s$ y la *aceleración* en $m/s^2$. En un contexto vectorial, la velocidad y la aceleración son

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \text{y} \qquad \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

con $\vec{r} = \vec{r}(t)$, la *posición*, describiendo una curva en $\mathbb{R}^3$, y cada una de sus tres coordenadas tienen las unidades indicadas en el Sistema Internacional.

La última columna de la tabla asigna a las magnitudes físicas una dimensión representada por una letra que abrevia longitud, tiempo, masa e intensidad. En física está terminantemente prohibido sumar peras con manzanas y por ello es necesario que en las ecuaciones las dimensiones cuadren. Estas dimensiones, indicadas con dim, se expresan como un "monomio" del tipo $\mathsf{L}^\alpha\mathsf{T}^\beta\mathsf{M}^\gamma\mathsf{I}^\delta$. Por ejemplo, para la velocidad y la aceleración se tiene $\dim v = \mathsf{LT}^{-1}$ y $\dim a = \mathsf{LT}^{-2}$. Otras cantidades importantes en física son el *momento lineal* y el *momento angular* definidos por

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \text{y} \qquad \vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = m\vec{r}\times\vec{v},$$

por tanto, las dimensiones de cada una de sus coordenadas son $\mathsf{LT}^{-1}\mathsf{M}$ y $\mathsf{L}^2\mathsf{T}^{-1}\mathsf{M}$, respectivamente.

Ninguna de estas magnitudes físicas derivadas de las fundamentales tiene unidades con nombre en el SI (fuera de él, a veces se emplea el *gal*, una unidad de aceleración [12]). Esto no es una regla general, el SI admite algo más de 20 nombres para unidades formadas por productos de potencias de las unidades básicas. Repasaremos algunas fórmulas con la excusa de introducir algunos de estos nombres.

Con seguridad, la fórmula más famosa de la física es $E = mc^2$ con $E$ la *energía* y $c$ es la velocidad de la luz. La coherencia de las dimensiones exige $\dim E = \mathsf{L}^2\mathsf{T}^{-2}\mathsf{M}$. A la unidad correspondiente se le llama *julio* (por J. P. Joule) y se indica con $J$. Es decir, un julio es, por definición, $1\,kg\,m^2\,s^{-2}$. La fórmula $E = mc^2$, que pertenece a la mecánica relativista, no será relevante en este curso ni lo es en nuestra experiencia cotidiana. Por cierto, no es tan importante el valor de la energía en sí, sino su variación. Más bien, la idea física que debemos tener de energía es que es una constructo matemático de forma que su cambio se puede emplear en realizar *trabajo*. La definición de este último tiene que ver con uno de los conceptos básicos que estudiaste en Cálculo II. El trabajo a lo largo de una trayectoria $\gamma$ se define como la integral de línea

$$W = \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad \text{con } \vec{F} \text{ la fuerza y } \vec{r} \text{ la posición.}$$

Quizá la segunda fórmula más famosa de la física sea $F = ma$ con $F$ la *fuerza*, que aquí tomaremos como su definición. Se deduce que $\dim F = \mathsf{LT}^{-2}\mathsf{M}$. La unidad asociada es el *newton* (obviamente, en honor a I. Newton, para muchos el mayor físico de todos los tiempos) igual a $1\,kg\,m\,s^{-2}$. En la línea de lo dicho antes, trabajo y energía tienen las mismas dimensiones. De la fórmula integral se deduce $\dim W = \mathsf{L}\dim F = \mathsf{L}\cdot\mathsf{LT}^{-2}\mathsf{M}$ que confirma $\dim W = \dim E$.

Las dos últimas unidades derivadas que consideraremos están relacionadas con la electricidad. Si has seguido un curso básico de física te asombrará que la *carga* (eléctrica) no parezca como magnitud básica. Por otro lado, está claro que las personas de a pie relacionan la electricidad con el *voltaje* que en física recibe el nombre técnico de *diferencia de potencial* (eléctrico) y tampoco aparece en la tabla. Estas son magnitudes físicas derivadas debido a las fórmulas

$$I = \frac{dq}{dt} \qquad \text{y} \qquad E = qV$$

donde $I$ es la corriente (eléctrica) (que toma el SI como magnitud básica), $q$ es la carga eléctrica y $V$ es la diferencia de potencial. En consonancia con estas fórmulas, $\dim q = \mathsf{TI}$ y $\dim V = \dim E/\dim q = \mathsf{L}^2\mathsf{T}^{-3}\mathsf{MI}^{-1}$. La unidad de carga es el *culombio* (por C.-A. de

Coulomb), denotado con $C$ e igual a $1\,s\,A$ y la de diferencia de potencial es el *voltio* (por A. Volta) igual a $1\,kg\,m^2\,s^{-3}\,A^{-1}$ y que, como todos sabemos, se suele indicar con $V$. Estas dos fórmulas no serán muy relevantes para nosotros, simplemente nos dan la tranquilidad de que no necesitamos más unidades fundamentales para definir cargas y diferencias de potencial. La segunda fórmula se relaciona con una unidad no perteneciente al Sistema Internacional que es muy común en física de altas energías: se llama *electronvoltio*, denotado mediante $eV$, a la energía que adquiere un *electrón* bajo una diferencia de potencial de un voltio. Utilizando la tabla al final de esta sección se deduce la igualdad exacta $1\,eV = 1{,}602176634 \cdot 10^{-19}J$. Para poner esto en perspectiva, la colisión más energética alcanzada en el LHC ha sido de $1{,}36 \cdot 10^{13}\,eV$, lo que son poco más de dos millonésimas de julio, algo imperceptible en el mundo macroscópico.

Lo dicho con respecto a las unidades derivadas de las básicas, se resume en la siguiente tabla:

| **Magnitud** | **Unidad** | **Símbolo** | **Definición** |
|---|---|---|---|
| fuerza | newton | $N$ | $1\,kg\,m\,s^{-2}$ |
| energía, trabajo | julio | $J$ | $1\,kg\,m^2\,s^{-2}$ |
| carga eléctrica | culombio | $C$ | $1\,s\,A$ |
| diferencia de potencial | voltio | $V$ | $1\,kg\,m^2\,s^{-3}\,A^{-1}$ |

Para ajustar las dimensiones algunas fórmulas físicas requieren *constantes universales*. Ya hemos visto una en la fórmula $E = mc^2$, que podemos interpretar como equivalencia entre masa y energía con un factor $c^2$ para que las dimensiones concuerden. Quizá te resulten familiares las que aparecen en la *ley de gravitación universal* de Newton y la *ley de Coulomb*

$$F = G\frac{m_1m_2}{d^2} \qquad y \qquad F = K\frac{q_1q_2}{d^2}$$

con $m_j$ masas, $q_j$ cargas y $d$ distancia. Es fácil ver que se debe cumplir $\dim G = \mathsf{L}^3\mathsf{T}^{-2}\mathsf{M}^{-1}$ y $\dim K = \mathsf{L}^3\mathsf{T}^{-4}\mathsf{M}\mathsf{I}^{-2}$ para que los segundos miembros tengan unidades de fuerza. Debido a las *ecuaciones de Maxwell*, que rigen la electrodinámica, $K$ se suele escribir como $1/(4\pi\varepsilon_0)$ y se dice que $\varepsilon_0$ es la *permitividad del vacío*, así pues $\dim \varepsilon_0 = \mathsf{L}^{-3}\mathsf{T}^4\mathsf{M}^{-1}\mathsf{I}^2$.

Una vez fijado un sistema de unidades, el valor de estas y otras constantes viene dictado por la naturaleza, son experimentales. Poco a poco el Sistema Internacional ha ido evolucionando para proceder en el sentido contrario y definir sus unidades en términos de algunas constantes físicas fundamentales (siete, actualmente) a las que se asigna convencionalmente valores exactos relacionados con números enteros. Así, aunque suene a broma, en 1983 se cambió el valor de la velocidad de la luz a un número entero para definir el metro sin tener que depender de un patrón almacenado en París. De cara a este curso, la constante más importante es la *constante de Planck* $h$ que tiene dimensiones de energía por tiempo que coinciden con las de momento angular, esto es, $\dim h = \mathsf{L}^2\mathsf{T}^{-1}\mathsf{M}$. Su cambio a un valor exacto de forma que $10^{42}h$ sea entero es muy reciente, de 2019. A pesar de que $h$ es la constante y notación originales en fórmulas de la física cuántica, en los textos actuales aparece más $\hbar = h/(2\pi)$, llamada *constante de Planck reducida*. Una tercera constante exacta es la *carga elemental* e que indica la carga del electrón sin signo (la misma que la del *protón*).

Los valores de todas las constantes mencionadas, añadiendo la masa del electrón que aparece en algunos cálculos, se recogen en la siguiente tabla:

| Constante | Símbolo | Valor | Naturaleza |
|---|---|---|---|
| constante de Planck | $h$ | $6{,}62607015 \cdot 10^{-34}\, J\, s$ | exacta |
| velocidad de la luz | $c$ | $299792458\, m\, s^{-1}$ | exacta |
| carga elemental | e | $1{,}602176634 \cdot 10^{-19}\, C$ | exacta |
| masa del electrón | $m_{\mathrm{e}}$ | $9{,}1093837139 \cdot 10^{-31}\, kg$ | aproximada |
| constante gravitatoria | $G$ | $6{,}67430 \cdot 10^{-11}\, kg^{-1}\, m^3\, s^{-2}$ | aproximada |
| permitividad del vacío | $\varepsilon_0$ | $8{,}8541878128 \cdot 10^{-12}\, C^2\, kg^{-1}\, m^{-3}\, s^2$ | aproximada |

Todas estas constantes excepto la gravitatoria serán relevantes en el curso.

## 1.2. Física extraña

A finales del siglo XIX y principios del XX, algunos fenómenos desafiaban la física conocida. Para no divagar daremos por conocidas varias fórmulas y la descripción de los problemas será más bien una interpretación moderna sesgada con los conocimientos actuales sin ajustarse del todo a la realidad histórica.

**La radiación del cuerpo negro.** Este fenómeno que se considera siempre en la génesis de la física cuántica, es el más difícil de explicar si no se tiene conocimientos sólidos de mecánica estadística, por ello será el que tenga una descripción más vaga (hay más detalles en [6]).

Un cuerpo emite radiación electromagnética con distintas *frecuencias* (número de oscilaciones por segundo) según sube su temperatura. Así, sabemos que algunos objetos se ponen "al rojo vivo", indicando que emiten luz visible mayoritariamente con la frecuencia correspondiente a este color. Para unificar la situación, se supone que el cuerpo tiene la capacidad de absorber cualquier frecuencia, no refleja ninguna, es lo que se llama un *cuerpo negro*. Experimentalmente, J. Stefan observó en 1879 que la energía irradiada por unidad de tiempo y de área a través de la superficie, digamos $P$, depende de la temperatura $T$ absoluta (en *kelvin*, grados *Celsius* más 273,16) por la fórmula

$$P = \sigma T^4 \qquad \text{con } \sigma \text{ una constante universal.}$$

L. Boltzmann justificó esta relación teóricamente en 1884 y por eso hoy en día se le llama *ley de Stefan-Boltzmann*.

Tras la teoría electromagnética de J. C. Maxwell es lógico pensar que la radiación se produce porque hay multitud de cargas que oscilan con diferentes frecuencias en el cuerpo negro.

Las técnicas para tratar sistemas con muchas partículas, son las de la mecánica estadística. Un argumento empleado habitualmente en esta disciplina es la *distribución de Boltzmann* (también relacionada con el trabajo de Maxwell) que consiste en que por cada "grado de libertad", la energía $E$ aparece con probabilidad $\exp\big(-\frac{E}{kT}\big)$ ([2], cf. [4, §40]) donde $T$ es la temperatura en kelvin y $k = 1{,}380649\, J\, K^{-1}$ es una constante universal, la *constante de Boltzmann*. Desde el punto de vista matemático, si suponemos que las energías forman un continuo en $[0, \infty)$ se tiene que la función de densidad de probabilidad en este intervalo viene dada por $f(E) = \frac{1}{kT}\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$ donde el coeficiente se ha escogido para que $\int_0^\infty f(E)\,dE = 1$. En esta situación, la energía media es la esperanza $\overline{E} = \int_0^\infty Ef(E)\,dE = kT$, según la fórmula que conoces de Probabilidad I.

Volviendo al cuerpo negro, una función fundamental es $u(\nu)$ con $\nu$ la frecuencia. Esta función se define como la densidad de energía emitida por unidad de frecuencia. Con argumentos de termodinámica y mecánica estadística se pueden probar las fórmulas

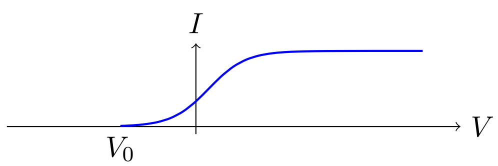
$$P = \frac{c}{4}\int_0^\infty u(\nu)\,d\nu \qquad \text{y} \qquad u(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\overline{E}_\nu$$

donde $\overline{E}_\nu$ es la energía media de los osciladores correspondientes a la frecuencia $\nu$. Ahora bien, en la radiación electromágnetica diferentes frecuencias se manifiestan como grados de libertad distintos, por tanto, se debería tener $\overline{E}_\nu = kT$, lo que lleva (sustituyendo en la segunda fórmula) a la *ley de Rayleigh-Jeans* $u(\nu) = 8\pi\nu^2 kT/c^3$ que se ajusta bien a los experimentos para frecuencias pequeñas y temperaturas moderadas. El problema surge porque al calcular la densidad de energía total, debida a la emisión en todas las frecuencias, obtenemos

$$\frac{8\pi kT}{c^3}\int_0^\infty \nu^2\,d\nu = \infty,$$

que implica $P = \infty$ en la ley de Stefan-Boltzmann. Esto se llama *catástrofe ultravioleta*, indicando que hay algo en las frecuencias altas (ultravioleta significa frecuencias mayores que las visibles) que hace que para ellas la teoría no funcione correctamente. De hecho los experimentos sugieren que a temperatura constante $u(\nu) \to 0$ cuando $\nu$ crece.

**El efecto fotoeléctrico.** En 1887 H. Hertz tras sus múltiples experimentos pioneros con ondas electromagnéticas observó que un metal bajo la acción de radiación ultravioleta emite electrones (en realidad habría que decir electricidad, porque el electrón no se descubrió hasta 1897). De alguna manera, la radiación electromagnética actúa sobre los electrones desprendiéndolos. Si aplicamos entre el cátodo, donde esta el metal, y el ánodo, donde se recogen los electrones, una diferencia de potencial (esto es como conectarlos a una batería) observaremos que la corriente eléctrica en función de la diferencia de potencial tiene una gráfica del tipo:




Esto parece razonable. La corriente $I$ depende de la cantidad de electrones que pasan por unidad de tiempo. Una diferencia potencial positiva ayuda a que los electrones pasen y una negativa, en oposición, los frena. A partir de cierto valor $I$ se estabiliza porque se desprenden todos los electrones posibles y para un valor $V_0$ de diferencia de potencial en oposición no se desprende ninguno. Gracias a la fórmula $E = qV$ la diferencia de potencial nos da información sobre la energía de los electrones mientras que $I = \frac{dq}{dt}$ nos la da acerca del número de electrones.

La intensidad de una onda electromagnética, que es como el cuadrado de su amplitud, está relacionada con la densidad de energía. Uno esperaría que mayor intensidad diera lugar a electrones más energéticos, pero no es así, solo se generan más electrones. La frecuencia es la que parece determinante, incluso radiación con poca intensidad arranca electrones si su frecuencia es alta, por otro lado, por debajo de cierta frecuencia el efecto desaparece, sea cual sea la intensidad.

Hay algo que no cuadra si imaginamos la radiación como ondas que chocan contra la materia. Hay una dependencia en la frecuencia cuando parece que lo lógico sería que se mostrase en la intensidad. Es como si en la playa observases que las olas altas mueven a mucha gente, pero muy poco a no ser que lleguen varias seguidas.

**La estructura atómica.** Los experimentos dirigidos por E. Rutherford en 1909 sugerían que los átomos estaban formados por electrones que orbitan alrededor de un núcleo cargado positivamente. En el movimiento circular la *fuerza centrífuga* viene dada por $mv^2/r$ con $r$ el radio. Si pensamos en el átomo más simple que solo tiene un electrón y un protón, el de hidrógeno, esta fuerza sobre el electrón debe estar compensada por la de Coulomb y se obtiene una relación entre el radio y la velocidad:

$$(1) \qquad \frac{m_{\mathrm{e}}v^2}{r} = \frac{K\mathrm{e}^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{K\mathrm{e}^2}{m_{\mathrm{e}}r} \quad \text{con} \quad K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

que lleva a que la energía total del electrón, compuesta por su *energía cinética* $\frac{1}{2}m_{\mathrm{e}}v^2$ y la *energía potencial* $-\frac{K\mathrm{e}^2}{r}$ correspondiente al campo eléctrico, es

$$E = E_{\mathrm{cin}} + E_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2}m_{\mathrm{e}}v^2 - \frac{K\mathrm{e}^2}{r} = \frac{K\mathrm{e}^2}{2r} - \frac{K\mathrm{e}^2}{r} = -\frac{K\mathrm{e}^2}{2r}.$$

Ahora bien, bajo ciertas hipótesis que daremos por ciertas, la *fórmula de Larmor* en electrodinámica [5] afirma que una partícula de carga $q$ y aceleración $a$ sufre una pérdida de energía por emisión de radiación electromagnética con una tasa de variación en el tiempo $\frac{2}{3}c^{-3}q^2a^2$. En nuestro caso, la aceleración es la *centrípeta* $v^2/r$, la que obliga al vector velocidad a torcerse para seguir el movimiento circular compensando la fuerza centrífuga, entonces

$$-\frac{d}{dt}\Big(-\frac{K\mathrm{e}^2}{2r}\Big) = \frac{2K\mathrm{e}^2(v^2/r)^2}{3c^3}.$$

Esto implica que $r$ es decreciente, de modo que el electrón tiende a precipitarse hacia el núcleo. Si suponemos que la variación de $r$ en el tiempo, al menos inicialmente, es mucho menor que $v$, seguirá una espiral que da muchas vueltas y nuestra hipótesis de partida de un movimiento circular será aproximadamente cierta. Sustituyendo $v^2$, operando y simplificando se obtiene la ecuación diferencial sencilla

$$\dot{r}r^2 + \mathcal{K} = 0 \qquad \text{con} \quad \mathcal{K} = \frac{4K^2\mathrm{e}^4}{3m_{\mathrm{e}}^2c^3}$$

donde, como es habitual en física, los puntos sobre las variables indican derivadas con respecto del tiempo. Resolviendo la ecuación diferencial por separación de variables, se obtiene que

$r = r(t)$ se anula para $t = t_c$ con

$$t_c = \frac{R_0^3}{3\mathcal{K}} = \frac{m_e^2 c^3 R_0^3}{4K^2 e^4} \qquad \text{donde} \quad R_0 = r(0).$$

El radio estimado de un átomo de hidrógeno es $R_0 \approx 5 \cdot 10^{-11}$ y con los valores numéricos que conocemos, la fórmula sugiere que en un tiempo $t_c \approx 1{,}3 \cdot 10^{-11} s$ el átomo de hidrógeno debería colapsar a un punto. En general, se deduce que es imposible la existencia de materia estable, en contra de nuestra experiencia más obvia, en particular, de que estés siguiendo este curso.

Por otro lado, se había observado que el hidrógeno y otros gases, sometidos a altas temperaturas emitía radiación electromagnética (luz, en el caso visible), con unas frecuencias características que dan lugar a las *líneas espectrales* muy útiles en astronomía. Los experimentos de J. J. Balmer y J. Rydberg sugerían que para los elementos alcalinos (que tienen un solo electrón en su última capa) las frecuencias $\nu$ satisfacían relaciones del tipo

$$\frac{\nu}{c} = R\Big(\frac{1}{(n_1+a)^2} - \frac{1}{(n_2+b)^2}\Big)$$

con $n_1$ y $n_2$ enteros, $a$ y $b$ constantes que dependían del elemento y $R$ una constante universal. Por consiguiente, parece que, por alguna razón misteriosa, solo ciertas radiaciones electromagnéticas relacionadas con enteros están permitidas y, por tanto, la aplicación de la fórmula de Larmor que conlleva una variación suave de $r$ es incorrecta.

## 1.3. Tres soluciones cuánticas

Históricamente, los problemas citados en la sección anterior se trataron con argumentos que en parte apelaban a la física clásica y en parte la negaban. El punto común era que, por razones que escapaban a una teoría general, algunas cantidades dejaban de ser continuas y pasaban a ser discretas a través de múltiplos enteros de la constante de Planck.

**La radiación del cuerpo negro.** La radiación electromagnética es típicamente más energética cuanto mayor es su frecuencia $\nu$, en el sentido de que parece tener mayor acción sobre la materia según lo reseñado en el efecto fotoeléctrico. Así una exposición prolongada a los rayos X usados en las radiografías (con $\nu \approx 3 \cdot 10^{19}\, s^{-1}$) puede dañar nuestros tejidos, mientras que la luz visible (con $\nu \approx 5 \cdot 10^{14}\, s^{-1}$) es inocua. En 1900, M. Planck [9], [10] supuso la radiación dividida en pequeños corpúsculos de energía $h\nu$ con $h$ un parámetro pequeño. En principio esto es solo un artificio teórico, análogo al utilizado originalmente por Boltzmann para deducir su distribución [2], y uno esperaría obtener el resultado físico tomando $h \to 0$.

Según la distribución de Boltzmann, la energía $nh\nu$ correspondiente a $n$ corpúsculos se obtiene con probabilidad proporcional a $\exp\big(-\frac{nh\nu}{kT}\big)$. Por tanto, la energía media es

$$\overline{E}_\nu = \frac{\sum_{n=0}^\infty nh\nu \exp\big(-\frac{nh\nu}{kT}\big)}{\sum_{n=0}^\infty \exp\big(-\frac{nh\nu}{kT}\big)}.$$

Utilizando las bien conocidas identidades matemáticas, que deberías saber probar fácilmente,

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n r^n = \frac{r}{(1-r)^2} \qquad \text{para cualquier} \quad |r| < 1,$$

se deduce la expresión

$$\overline{E}_\nu = \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}. \tag{2}$$

Con lo que nos hemos creído de la relación con la densidad de energía de radiación por unidad de frecuencia, esta viene dada por la *fórmula de Planck*

$$u(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3 c^{-3}}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}.$$

Cuando $h \to 0$ se obtiene $u(\nu) = 8\pi\nu^2 kT/c^3$, la ley de Rayleigh-Jeans que nos daba problemas. Sin embargo, tomar como $h$ una constante positiva induce un decaimiento exponencial para frecuencias altas que nos salva de la catástrofe ultravioleta. La solución de compromiso es pensar que $h$ es una constante no nula muy pequeña, esto es, que los corpúsculos de energía son físicamente reales.

Veamos que la fórmula de Planck permite deducir la ley de Stefan-Boltzmann. Según lo que sabemos,

$$P = \frac{c}{4}\int_0^\infty u(\nu)\,d\nu = \frac{2\pi h}{c^2}\int_0^\infty \frac{\nu^3\,d\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}.$$

Ahora basta utilizar la evaluación de la integral definida

$$\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

tras un cambio de variable para obtener

$$P = \sigma T^4 \qquad \text{con} \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3}.$$

Un apunte final, es que, si uno trata de ser riguroso con la historia, Planck no procedió de la manera descrita y realizó varias versiones de su argumento [7], [6]. Por otro lado, seguramente el desarrollo ulterior de la física cuántica ha hecho exagerar a los científicos y divulgadores actuales el presunto énfasis de Planck en los paquetes de energía discretos.

**El efecto fotoeléctrico.** A pesar de que [3] es considerado "el artículo sobre el efecto fotoélectrico" de los cuatro famosos de A. Einstein en su *annus mirabilis* [11], la verdad es que está más dedicado a la radiación del cuerpo negro. Además, la notación del apartado que se ocupa del efecto fotoeléctrico es poco reconocible para un lector actual. Por otro lado, la introducción del artículo resulta muy cercana, un verdadero pistoletazo de salida de la física cuántica que no desentonaría en un texto actual. Allí se lee:

> La teoría ondulatoria de la luz con sus funciones espaciales continuas ha mostrado ser un excelente modelo de los fenómenos puramente ópticos [...], a pesar de la perfecta concordancia de la teoría de Maxwell con los experimentos, el uso de funciones espaciales continuas para describir la luz puede llevar a contradicciones con experimentos, especialmente cuando se aplica a la generación y transformación de la luz.
>
> En particular, la radiación del cuerpo negro, la fotoluminescencia, la generación de rayos catódicos mediante luz ultravioleta y otros fenómenos asociados con la generación y transformación de la luz parece modelarse mejor suponiendo que la energía de la luz se distribuye discontinuamente en el espacio. De acuerdo con este esquema, la energía de una onda de luz emitida desde una fuente puntual no se distribuye continuamente sobre volúmenes cada vez mayores, sino que consiste en un número finito de cuantos de energía que están localizados espacialmente en puntos del espacio, se mueven sin dividirse y son absorbidos o generados como un todo.

Los *cuantos* (corpúsculos) de energía, que Einstein consideró son lo que más adelante se llamarían *fotones*, las partículas sin masa que componen las radiaciones electromagnéticas, en particular, la luz. Cada uno de ellos tiene una energía dada por

$$E = h\nu \qquad \text{con } \nu \text{ la frecuencia.}$$

A esta relación se le llama *fórmula de Planck* o *fórmula de Planck-Einstein* para evitar confusiones con la de la adiación del cuerpo negro. Planck dividió en corpúsculos múltiplos enteros de $h\nu$ la energía en la interacción entre ondas electromagnéticas y materia mientras que Einstein consideró que las propias ondas no son tales ondas sino que están compuestas de fotones.

Con esta idea, cada electrón en el efecto fotoeléctrico puede alcanzar una energía $h\nu$. En realidad habrá que gastar parte de esta energía $W$ para desprenderlo del metal. De este modo, la ecuación fundamental que da la energía cinética de cada electrón es

$$\frac{1}{2}m_{\mathrm{e}}v^2 = h\nu - W.$$

Esta fórmula explica cualitativamente el fenómeno, pero $W$ depende de la estructura del metal considerado y no lo conocemos, además, es de esperar que electrones de diferentes capas del átomo del metal necesitan diferentes energías. Para evitar ese problema, disminuyamos poco a poco la frecuencia hasta llegar a una frecuencia umbral $\nu_0$ en la que no hay efecto fotoeléctrico. Se debe cumplir que $W$, en realidad el $W$ mínimo para todos los electrones del metal, es $h\nu_0 = W$. Si ahora aumentamos la frecuencia y vemos la diferencia de potencial en oposición $V_0$ necesaria para parar los electrones, deberíamos tener (recordando $E = qV$)

$$V_0 = \frac{h}{\mathrm{e}}(\nu - \nu_0).$$

Esta relación lineal concuerda con los resultados experimentales obtenidos por R. Millikan en 1914 que contribuyeron a que se le otorgara el premio Nobel. Paradójicamente, su motivación era demostrar que Einstein estaba equivocado. La fórmula anterior permitió medir experimentalmente la constante de Planck con cierta precisión [8] tomándola como la pendiente de la gráfica de $V_0$ en función de $\nu$ multiplicada por e.

**La estructura atómica.** N. Bohr [1] explicó el *átomo de hidrógeno* en 1913 suponiendo que el electrón describe un movimiento circular uniforme alrededor del núcleo (más adelante, A. Sommerfeld consideró órbitas elípticas) donde la *acción* a lo largo de cada órbita es un múltiplo entero de la constante de Planck $h$. Este es un caso de la llamada *condición de cuantización de Bohr-Sommerfeld*:

$$\oint p\,dq = nh \qquad \text{con} \quad n \in \mathbb{N}.$$

La integral es lo que define la *acción*. Sin entrar en detalles, en nuestro caso $p$ es el momento lineal $m_{\mathrm{e}}v$ y $q$ es el espacio, de modo que $\oint p\,dq = m_{\mathrm{e}}v \cdot 2\pi r$. En definitiva, la condición de cuantización es simplemente el requerimiento de que

$$m_{\mathrm{e}}vr = \hbar n \qquad \text{con} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Equivale a imponer que el módulo del momento angular del electrón en su órbita circular sea un múltiplo entero de $\hbar$. Esta condición es un "apaño" sin explicación con la física de su tiempo, pero con los antecedentes de la fórmula de Planck y del efecto fotoeléctrico. Al combinar (1) con la condición de cuantización,

$$(3) \qquad r = \frac{\hbar^2 n^2}{K m_{\mathrm{e}} \mathrm{e}^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{2} m_{\mathrm{e}} v^2 = \frac{m_{\mathrm{e}} K^2 \mathrm{e}^4}{2\hbar^2 n^2}.$$

La primera fórmula implica que las distancias al núcleo toman un conjunto discreto de valores. La que corresponde a $n = 1$ se llama *radio de Bohr* y numéricamente es

$$r_B = \frac{\hbar^2}{K m_{\mathrm{e}} \mathrm{e}^2} \approx 5{,}29 \cdot 10^{-11}\, m$$

que concuerda con el tamaño estimado de un átomo de hidrógeno. La segunda fórmula es la energía cinética del electrón e indica la *energía de enlace*, lo que nos costaría desligar el electrón del núcleo, por ello es natural asignar al sistema su negativo que denotaremos con $E_n$. Con lo visto sobre el efecto fotoeléctrico, al pasar de un $n_2$ a un $n_1 < n_2$ se emite energía que corresponde a una frecuencia

$$\nu = \frac{E_{n_2} - E_{n_1}}{h} = Rc\Big(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\Big) \qquad \text{con} \quad R = \frac{m_{\mathrm{e}} K^2 \mathrm{e}^4}{4\pi c \hbar^3}.$$

Esto concuerda, en el caso del hidrógeno, con los experimentos de Balmer y Rydberg y da una expresión teórica para la constante $R$ que explica su valor experimental.

Pasar de cualquier $n_2 > 1$ a $n_1 = 1$ libera energía, en otras palabras, $E_1$ es mínimo. El caso $n = 1$ en la condición de cuantización se dice que corresponde al *estado fundamental* del átomo. El nombre es adecuado, pues, por razones que escapan al curso, los estados del átomo de hidrógeno correspondientes a $n > 1$ decaen muy rápidamente al fundamental en condiciones normales. Desde el punto de vista clásico, parece natural que se tienda a la mínima energía, aunque justamente Bohr creó su modelo para violar las leyes clásicas que precipitaban el electrón al núcleo.

## Ejercicios de la sección 1

EJERCICIO 1. La constante $\alpha = \mathrm{e}^2/(2\epsilon_0 hc)$ se llama *constante de estructura fina* y desempeña un papel fundamental en física cuántica cuando se consideran efectos relativistas. Muestra que es adimensional y calcula $\alpha^{-1} - 137$ con dos decimales. Un físico renombrado creyó en 1929 que $\alpha^{-1} \in \mathbb{N}$ y todavía hoy hay alguna numerología marginal sobre $\alpha$.

EJERCICIO 2. Comprueba que $Rch$ con $R = m_\mathrm{e}K^2\mathrm{e}^4/(4\pi c\hbar^3)$ y $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ tiene unidades de energía.

EJERCICIO 3. Comprueba que en la ecuación $\dot{r}r^2 + \mathcal{K} = 0$ con $\mathcal{K} = \frac{4K^2\mathrm{e}^4}{3m_\mathrm{e}^2c^3}$ y $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ las dimensiones son coherentes.

EJERCICIO 4. Resuelve la ecuación diferencial del ejercicio anterior, muestra que bajo $r(0) = R_0 > 0$ se sigue $r(t_c) = 0$ para $t_c = \frac{1}{3}\mathcal{K}^{-1}R_0^3$ y calcula el valor numérico aproximado de $t_c$ cuando $R_0 = 5 \cdot 10^{-11}$. Según lo visto en la teoría, $t_c$ aproxima el tiempo que tardaría en colapsar un átomo de hidrógeno según la electrodinámica clásica.

EJERCICIO 5. Demuestra $\sum_{n=0}^{\infty} nr^n = r(1-r)^{-2}$ para $|r| < 1$ y escribe con detalle la deducción de (2).

EJERCICIO 6. Es bien conocido que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} = \pi^4/90$. Por ejemplo, se deduce de la identidad Parseval aplicada al desarrollo de Fourier de $x^2 - \pi^2/3$ en $[-\pi, \pi]$. Dando esto por supuesto, demuestra $\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^x-1} = \frac{\pi^4}{15}$. Indicación: Expresa $(e^x - 1)^{-1}$ como la suma de una progresión geométrica.

EJERCICIO 7. Escribe los detalles en la deducción de la ley de Stefan-Boltzmann con un cambio de variable.

EJERCICIO 8. Comprueba que (3) se sigue al combinar la condición de cuantización con (1).

EJERCICIO 9. Vamos a reproducir un cálculo que hizo Stefan para estimar la temperatura de la superficie del Sol. La energía por unidad de tiempo y superficie que nos llega a la Tierra desde el Sol es $P_T = 1367\,J\,m^{-2}\,s^{-1}$. Explica por qué $P$ en la superficie del Sol debería ser $P = \frac{4\pi d^2}{4\pi R^2}P_T$ donde $d$ es la distancia de la Tierra al Sol y $R$ es el radio del Sol. Busca estos dos valores, sustituye en la ley de Stefan-Boltzmann y deduce la temperatura de la superficie del Sol.

EJERCICIO 10. La superficie de la Tierra es calentada por el Sol y para estar en equilibrio térmico todo debería funcionar como si fuera su temperatura la que genera el calor que la circunda. Con la notación del problema anterior, trata de justificar por qué es natural suponer que la energía por unidad de área y de tiempo es $\frac{\pi r^2}{4\pi r^2}P_T$ con $r$ el radio de la Tierra. Suponiendo en primera aproximación que se comporta como un cuerpo negro, deduce la temperatura (media) en kelvin de su superficie con la ley de Stefan-Boltzmann. Indicación: Nota que $P_T$ solo llega a la mitad de la Tierra en que es de día.

## Referencias

[1] N. Bohr. I. On the constitution of atoms and molecules. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 26(151):1–25, 1913.

[2] F. Chamizo. La distribución de Maxwell-Boltzmann y más. hhttps://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/physics/files/boltzmann.pdf, 2016.

[3] A. Einstein. Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. *Annalen der Physik*, 322(6):132–148, 1905.

[4] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman lectures on physics. Vol. 1: Mainly mechanics, radiation, and heat.* Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London, 1963. Available in https://www.feynmanlectures.caltech.edu/.

[5] J. Franklin. Electromagnetic power emitted by an accelerating point charge. arXiv:2103.09317 [physics.class-ph], 2022.

[6] M. Giliberti and L. Lovisetti. *Old Quantum Theory and Early Quantum Mechanics. A Historical Perspective Commented for the Inquiring Reader.* Challenges in Physics Education. Springer Nature Switzerland AG, 2024. With a foreword by H. Kragh.

[7] H. Mavani and N. Singh. A concise history of the black-body radiation problem. *Resonance*, 29(5):645–670, May 2024.

[8] R. A. Millikan. A direct photoelectric determination of Planck's "$h$". *Phys. Rev.*, 7:355–388, Mar 1916.

[9] M. Planck. *Über eine Verbesserung der Wien'schen Spectralgleichung.* Leipzig : J.A. Barth, Germany, 1900. p.202–204.

[10] M. Planck. Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspectrum. *Verhandl. Dtsc. Phys. Ges.*, 2:237, 1900.

[11] Wikipedia contributors. Annus mirabilis papers (Einstein) — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Annus_mirabilis_papers&oldid=1319676679, 2025. [Online; accessed 12-January-2026].

[12] Wikipedia contributors. Gal (unit) — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Gal_(unit)&oldid=1306328993, 2025. [Online; accessed 20-January-2026].