

- Matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Operadores de espín:

$$S_j = \frac{\hbar}{2} \sigma_j \quad \text{para } j = 1, 2, 3.$$

- Relación entre las bases  $\{|z+\rangle, |z-\rangle\}$ ,  $\{|x+\rangle, |x-\rangle\}$  y  $\{|y+\rangle, |y-\rangle\}$ :

$$\begin{cases} |x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+\rangle + |z-\rangle), \\ |x-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+\rangle - |z-\rangle), \end{cases} \quad \begin{cases} |y+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+\rangle + i|z-\rangle), \\ |y-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+\rangle - i|z-\rangle). \end{cases}$$

- Estados de espín correspondiente a un vector  $\vec{n}$  en la esfera de Bloch con coordenadas esféricas  $(\varphi, \theta)$ :

$$|\vec{n}+\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |z+\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |z-\rangle \quad \text{y} \quad |\vec{n}-\rangle = -e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |z+\rangle + \cos \frac{\theta}{2} |z-\rangle.$$

- La notación  $\vec{n} \cdot \vec{\sigma}$  significa  $n_1 \sigma_1 + n_2 \sigma_2 + n_3 \sigma_3$ . Las relaciones algebraicas entre las matrices de Pauli se resumen en  $(\vec{u} \cdot \vec{\sigma})(\vec{v} \cdot \vec{\sigma}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + i(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{\sigma}$  para  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ .
- Operador de rotación asociado a un vector unitario  $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$  y un ángulo  $\alpha$

$$R_{\vec{u}}(\alpha) = \cos \frac{\alpha}{2} - i \sin \frac{\alpha}{2} \vec{u} \cdot \vec{\sigma}.$$

- Para cualquier rotación  $G$  con eje en la dirección unitaria  $\vec{u}$  y ángulo  $\alpha$  se cumple el teorema de rotación de Pauli

$$|G\vec{n}\rangle = \lambda R_{\vec{u}}(\alpha) |\vec{n}\rangle$$

donde  $|\vec{n}\rangle$  abrevia  $|\vec{n}+\rangle$  y  $\lambda$  es un número de módulo 1.

- Isomorfismo lexicográfico entre  $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$  y  $\mathbb{C}^{mn}$ :

$$\Phi : \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{mn} \quad \text{dado por} \quad \Phi \left( \left( \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right) \right) = \begin{pmatrix} v_1 w_1 \\ v_1 w_2 \\ \vdots \\ v_m w_{n-1} \\ v_m w_n \end{pmatrix}.$$

- Fórmula para el producto de Kronecker de matrices:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mm}B \end{pmatrix}.$$

- Notación abreviada:  $|+\rangle = |z+\rangle$ ,  $|-\rangle = |z-\rangle$  y  $|s_1 s_2 \cdots s_n\rangle = |s_1\rangle \otimes |s_2\rangle \otimes \cdots \otimes |s_n\rangle$  con  $s_j \in \{+, -\}$ .

- Estados de Bell

$$|\Phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle + |--\rangle) \quad \text{y} \quad |\Phi_j\rangle = (1 \otimes \sigma_j)|\Phi_0\rangle \quad \text{para } j = 1, 2, 3.$$

- Fórmulas explícitas para  $|\Phi_1\rangle$ ,  $|\Phi_2\rangle$  y  $|\Phi_3\rangle$ :

$$|\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle), \quad |\Phi_2\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle), \quad |\Phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle - |--\rangle).$$

- Teorema de no clonación: Sea  $V$  un espacio de Hilbert sobre  $\mathbb{C}$  con  $\dim V > 1$ . Dado  $\vec{v}_0 \in V - \{\vec{0}\}$  no existe ningún operador lineal unitario en  $V \otimes V$  tal que

$$U(\vec{v} \otimes \vec{v}_0) = \lambda(\vec{v})\vec{v} \otimes \vec{v} \quad \text{para todo } \vec{v} \in V \text{ normalizado donde } \lambda(\vec{v}) \in \mathbb{C}.$$

- Teorema de no borrado: Con la notación del teorema de no clonación, no existe  $U$  unitario tal que

$$U(\vec{v} \otimes \vec{v}) = \lambda(\vec{v})\vec{v} \otimes \vec{v}_0 \quad \text{para todo } \vec{v} \in V \text{ normalizado.}$$

- Esquema de la teleportación cuántica:

Estado inicial	Medición de Alicia	Operador unitario de Beatriz
$\frac{1}{\sqrt{2}} +\rangle \otimes  \varphi\rangle \otimes  +\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} -\rangle \otimes  \varphi\rangle \otimes  -\rangle$	$ \Phi_j\rangle \otimes \sigma_j  \varphi\rangle$	$ \Phi_j\rangle \otimes  \varphi\rangle$
	$\longrightarrow$	$\xrightarrow{j}$