Apellidos y nombre: ....

.... DNI (o pasaporte): ....

1) [2.5 puntos] Dado $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ normalizado y $\alpha \in \mathbb{R}$, demuestra que el operador de rotación satisface $(R_{\vec{u}}(\alpha))^k = R_{\vec{u}}(k\alpha)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

2) [2.5 puntos] Alicia y Beatriz tienen, respectivamente, la primera y la segunda partícula de un estado entrelazado correspondiente a $\frac{3}{4}|{+}{+}\rangle + \frac{1}{4}|{+}{-}\rangle + \frac{2+i}{4}|{-}{+}\rangle + \frac{1}{4}|{-}{-}\rangle$. Primero Alicia mide el espín de su partícula en la dirección z y obtiene $|+\rangle$. Después Beatriz mide el de la suya en la dirección x. Calcula la probabilidad de que obtenga $|x-\rangle$.

3) [2.5 puntos] Sean los operadores en $\mathbb{C}^2$

$$S = 2|+\rangle\langle+| - 1 \qquad \text{y} \qquad T = 1 - (|+\rangle + |-\rangle)(\langle+| + \langle-|)$$

Calcula la matriz de $S \otimes T$ en la base usual $\{|{+}{+}\rangle, |{+}{-}\rangle, |{-}{+}\rangle, |{-}{-}\rangle\}$.

4) [1+1.5 puntos] Sea $|\psi_0\rangle = \frac{1}{10}|{+}{+}\rangle - \frac{7}{10}|{+}{-}\rangle + \frac{i}{10}|{-}{+}\rangle - \frac{7i}{10}|{-}{-}\rangle$.

a) Halla $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathbb{C}^2$ normalizados tales que $|\psi_0\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$.

b) Completa razonadamente $|\psi_0\rangle$ a una base ortonormal $\{|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle\}$ de $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ tal que ninguno de los $|\psi_j\rangle$ corresponda a un estado entrelazado.

1) Procedemos por inducción en k. Si $k=1$, el resultado es trivial. Recordando la definición de $R_{\vec{u}}(\alpha)$, la hipótesis de inducción $(R_{\vec{u}}(\alpha))^k = R_{\vec{u}}(k\alpha)$ se escribe como

$$(R_{\vec{u}}(\alpha))^k = \cos\frac{k\alpha}{2} - i\operatorname{sen}\frac{k\alpha}{2}\,\vec{u}\cdot\vec{\sigma}.$$

Queremos deducir, $(R_{\vec{u}}(\alpha))^{k+1} = R_{\vec{u}}((k+1)\alpha)$. Con este fin, sustituimos en $(R_{\vec{u}}(\alpha))^{k+1} = R_{\vec{u}}(\alpha)(R_{\vec{u}}(\alpha))^k$ para obtener

$$\begin{aligned}(R_{\vec{u}}(\alpha))^{k+1} &= \Big(\cos\frac{\alpha}{2} - i\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\,\vec{u}\cdot\vec{\sigma}\Big)\Big(\cos\frac{k\alpha}{2} - i\operatorname{sen}\frac{k\alpha}{2}\,\vec{u}\cdot\vec{\sigma}\Big)\\ &= \Big(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{k\alpha}{2} - \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{k\alpha}{2}(\vec{u}\cdot\vec{\sigma})^2\Big) - i\Big(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{k\alpha}{2} + \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{k\alpha}{2}\Big)\,\vec{u}\cdot\vec{\sigma}.\end{aligned}$$

Se cumple $(\vec{u}\cdot\vec{\sigma})(\vec{u}\cdot\vec{\sigma}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + i(\vec{u}\times\vec{u})\cdot\vec{\sigma} = 1$, porque $\vec{u}$ está normalizado y $\vec{u}\times\vec{u} = \vec{0}$. Las fórmulas de adición para el seno y el coseno muestran que los paréntesis grandes son $\cos\frac{(k+1)\alpha}{2}$ y $\operatorname{sen}\frac{(k+1)\alpha}{2}$, respectivamente, obteniéndose el resultado para $k+1$.

---

2) Al medir en la dirección z la primera partícula y obtener $|+\rangle$, colapsa a

$$\frac{3}{4}\,|{+}{+}\rangle + \frac{1}{4}\,|{+}{-}\rangle \xrightarrow{\text{normalización}} |\psi\rangle = \frac{3}{\sqrt{10}}\,|{+}{+}\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}}\,|{+}{-}\rangle\,.$$

La probabilidad de obtener $|x-\rangle$ en la medición de la segunda partícula es, de acuerdo con el Postulado 3,

$$p = \big|\,\langle\psi|\phi\rangle\,\big|^2 \qquad \text{con} \qquad |\phi\rangle = |+\rangle\otimes|x-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|{+}{+}\rangle - |{+}{-}\rangle\,\big)$$

donde se ha usado la fórmula para $|x-\rangle$. Así pues,

$$p = \Big(\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{10}}\Big)^2 = \frac{1}{5}.$$

---

3) Calculamos la acción de S y T sobre la base ortonormal $\{|+\rangle\,,|-\rangle\}$ de $\mathbb{C}^2$:

$$\begin{aligned} S\,|+\rangle &= 2\,|+\rangle\,\langle+|+\rangle - |+\rangle = |+\rangle\,, & T\,|+\rangle &= |+\rangle - (|+\rangle + |-\rangle)(\langle+|+\rangle + \langle-|+\rangle) = -\,|-\rangle\,,\\ S\,|-\rangle &= 2\,|+\rangle\,\langle+|-\rangle - |-\rangle = -\,|-\rangle\,, & T\,|-\rangle &= |-\rangle - (|+\rangle + |-\rangle)(\langle+|-\rangle + \langle-|-\rangle) = -\,|+\rangle\,.\end{aligned}$$

Por tanto, si M es la matriz de $S\otimes T$,

$$S\otimes T: \begin{array}{ccr} |{+}{+}\rangle & \mapsto & -\,|{+}{-}\rangle\\ |{+}{-}\rangle & \mapsto & -\,|{+}{+}\rangle\\ |{-}{+}\rangle & \mapsto & |{-}{-}\rangle\\ |{-}{-}\rangle & \mapsto & |{-}{+}\rangle \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

4) a) Sacando factor común,

$$\begin{aligned}|\psi_0\rangle &= |+\rangle \otimes \Big(\frac{1}{10}\,|+\rangle - \frac{7}{10}\,|-\rangle\Big) + i\,|-\rangle \otimes \Big(\frac{1}{10}\,|+\rangle - \frac{7}{10}\,|-\rangle\Big)\\ &= \big(\,|+\rangle + i\,|-\rangle\,\big) \otimes \Big(\frac{1}{10}\,|+\rangle - \frac{7}{10}\,|-\rangle\Big) = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle\end{aligned}$$

con

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|+\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}\,|-\rangle \qquad \text{y} \qquad |\beta\rangle = \frac{\sqrt{2}}{10}\,|+\rangle - \frac{7\sqrt{2}}{10}\,|-\rangle$$

que están normalizados.

b) Se tiene $|\alpha\rangle \perp |\gamma\rangle$ y $|\beta\rangle \perp |\delta\rangle$ con $|\gamma\rangle$ y $|\delta\rangle$ los vectores normalizados

$$|\gamma\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}\,|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|-\rangle \qquad \text{y} \qquad |\delta\rangle = \frac{7\sqrt{2}}{10}\,|+\rangle + \frac{\sqrt{2}}{10}\,|-\rangle\,.$$

Por la manera en que se hace el producto escalar en $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ (multiplicando los productos escalares de cada "factor"), se tiene que

$$\big\{\,|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle\,,\ |\gamma\rangle \otimes |\beta\rangle\,,\ |\alpha\rangle \otimes |\delta\rangle\,,\ |\gamma\rangle \otimes |\delta\rangle\,\big\}$$

es base ortonormal. Sus cuatro elementos corresponden a estados producto.
