
 Apellidos y nombre:

 DNI (o pasaporte):

1) [1+1.5 puntos] Supongamos que L y m tienen dimensiones de longitud y masa, respectivamente.

a) Comprueba que la expresión $T_0 = \frac{mL^2}{3\pi\hbar}$ tiene dimensiones de tiempo.

b) Si $\psi(x) = L^{-3/2}x e^{-mx^2/(\hbar T_0)}$ es solución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para un potencial continuo $V = V(x)$ con $V(0) = 0$, halla V y la energía E en términos de m y T_0 .

2) [2.5 puntos] Dando por conocido $[a, a^\dagger] = 1$, donde a y a^\dagger son los operadores de destrucción y creación, demuestra $[a^\dagger, a^n] = -na^{n-1}$ para $n \in \mathbb{Z}^+$.

3) [2.5 puntos] Supongamos que en un sistema cuántico el espacio subyacente tiene una base ortonormal $\mathcal{B} = \{|1\rangle, |2\rangle, \dots, |n\rangle\}$. Justifica la identidad $\sum_{j=1}^n \langle j|u\rangle \langle v|j\rangle = \langle v|u\rangle$ para $|u\rangle$ y $|v\rangle$ arbitrarios (no necesariamente en \mathcal{B}).

4) [2.5 puntos] Sea $\Psi(x, t)$ es la función de ondas correspondiente a una partícula libre en la circunferencia de longitud L bajo la condición inicial $\Psi(x, 0) = f(x)$. Demuestra que para T_0 como en el primer problema se tiene

$$\sqrt{3}\Psi(x, T_0) = -if(x) + \frac{\sqrt{3}+i}{2}(f(x-L/3) + f(x+L/3)).$$

1) a) La constante de Planck reducida \hbar tiene dimensiones de energía por tiempo (recordemos $E = \hbar\omega$) y la energía tiene dimensiones de masa por velocidad al cuadrado (recordemos $E = mc^2$). Por tanto, $\dim \hbar = \text{M}(\text{LT}^{-1})^2\text{T} = \text{ML}^2\text{T}^{-1}$, lo que implica $\dim T_0 = \text{T}$.

b) Para abreviar, escribamos $\alpha = \frac{m}{\hbar T_0}$. La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo es $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V\psi = E\psi$ que lleva a $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{(x \exp(-\alpha x^2))''}{x \exp(-\alpha x^2)} = E - V(x)$ para $x \neq 0$, dividiendo entre ψ . Derivando, $(x \exp(-\alpha x^2))'' = ((1 - 2\alpha x^2) \exp(-\alpha x^2))' = (-6\alpha x + 4\alpha^2 x^3) \exp(-\alpha x^2)$. Se obtiene entonces, por continuidad, que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(-6\alpha + 4\alpha^2 x^2) = E - V(x).$$

Con $x = 0$ se deduce $E = \frac{3\hbar^2\alpha}{m} = \frac{3\hbar}{T_0}$. Consecuentemente, $V(x) = \frac{2\hbar^2\alpha^2}{m}x^2 = \frac{2m}{T_0^2}x^2$.

2) Procedemos por inducción en n . Si $n = 1$, entonces $[a^\dagger, a] = -[a, a^\dagger] = -1$ y se cumple. Supongamos ahora que $[a^\dagger, a^n] = -na^{n-1}$ como hipótesis de inducción y queremos deducir $[a^\dagger, a^{n+1}] = -(n+1)a^n$. Se tiene

$$[a^\dagger, a^{n+1}] = a^\dagger a^{n+1} - a^{n+1} a^\dagger = (a^\dagger a^n - a^n a^\dagger)a - a^n (a a^\dagger - a^\dagger a).$$

El primer paréntesis es $-na^{n-1}$, por la hipótesis de inducción, y el segundo es $[a, a^\dagger] = 1$. Por tanto, se obtiene $-na^n - a^n = -(n+1)a^n$.

3) Sean $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ y $\{\mu_k\}_{k=1}^n$, respectivamente, las coordenadas de $|u\rangle$ y $|v\rangle$ en \mathcal{B} . Es decir, $|u\rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j |j\rangle$ y $|v\rangle = \sum_{k=1}^n \mu_k |k\rangle$. El producto escalar es lineal en el segundo argumento y antilineal en el primero, por consiguiente,

$$\langle v|u\rangle = \sum_{j,k=1}^n \mu_k^* \lambda_j \langle k|j\rangle = \sum_{k=1}^n \mu_k^* \lambda_k$$

donde en la segunda igualdad se ha usado la ortonormalidad de \mathcal{B} . Por dicha ortonormalidad, $\langle j|u\rangle$ y $\langle j|v\rangle$ son las j -ésimas coordenadas de $|u\rangle$ y $|v\rangle$, así pues,

$$\sum_{j=1}^n \langle j|u\rangle \langle v|j\rangle = \sum_{j=1}^n \langle j|u\rangle \langle j|v\rangle^* = \sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_j^*$$

que coincide con el resultado anterior.

4) Para tal partícula libre se tiene

$$\Psi(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar} \quad \text{con} \quad \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{2\pi i n x/L} \quad \text{y} \quad E_n = \frac{2\pi^2 \hbar^2 n^2}{mL^2}.$$

Por tanto, tomando $t = T_0$

$$\Psi(x, T_0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \psi_n(x) e^{-2\pi i n^2/3}.$$

De $f(x) = \Psi(x, 0)$ y de esta misma relación cambiando x por $x \mp L/3$ se sigue

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \psi_n(x), \quad f(x - L/3) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \psi_n(x) e^{-2\pi i n/3}, \quad f(x + L/3) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \psi_n(x) e^{2\pi i n/3}.$$

Entonces, usando $e^{-2\pi i n/3} + e^{2\pi i n/3} = 2 \cos(2\pi n/3)$, basta probar la igualdad

$$\sqrt{3} e^{-2\pi i n^2/3} = -i + (\sqrt{3} + i) \cos(2\pi n/3) \quad \text{para } n \in \mathbb{Z}.$$

Si n es múltiplo de 3, el coseno y la exponencial valen 1 y se sigue el resultado. Si n no es múltiplo de 3 el coseno es $-1/2$ y la exponencial $e^{-2\pi i n^2/3} = e^{-2\pi i (3k \pm 1)^2/3} = e^{-2\pi i/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ y, de nuevo, se obtiene la igualdad.
