Primer parcial | Sem. Mat. Avanzada | Matemáticas | 25/mar/2026

Apellidos y nombre: ....

.... DNI (o pasaporte): ....

---

1) [1+1.5 puntos] Supongamos que L y m tienen dimensiones de longitud y masa, respectivamente.

a) Comprueba que la expresión $T_0 = \dfrac{mL^2}{3\pi\hbar}$ tiene dimensiones de tiempo.

b) Si $\psi(x) = L^{-3/2}x\, e^{-mx^2/(\hbar T_0)}$ es solución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para un potencial continuo $V = V(x)$ con $V(0) = 0$, halla V y la energía E en términos de m y T_0.

2) [2.5 puntos] Dando por conocido $[a, a^\dagger] = 1$, donde a y $a^\dagger$ son los operadores de destrucción y creación, demuestra $[a^\dagger, a^n] = -na^{n-1}$ para $n \in \mathbb{Z}^+$.

3) [2.5 puntos] Supongamos que en un sistema cuántico el espacio subyacente tiene una base ortonormal $\mathcal{B} = \{|1\rangle, |2\rangle, \dots, |n\rangle\}$. Justifica la identidad $\sum_{j=1}^n \langle j|u\rangle \langle v|j\rangle = \langle v|u\rangle$ para $|u\rangle$ y $|v\rangle$ arbitrarios (no necesariamente en $\mathcal{B}$).

4) [2.5 puntos] Sea $\Psi(x,t)$ es la función de ondas correspondiente a una partícula libre en la circunferencia de longitud L bajo la condición inicial $\Psi(x,0) = f(x)$. Demuestra que para T_0 como en el primer problema se tiene

$$\sqrt{3}\,\Psi(x,T_0) = -if(x) + \frac{\sqrt{3}+i}{2}\big(f(x-L/3) + f(x+L/3)\big).$$