Sistemas de ecuaciones lineales

Ingeniería Biomédica   Curso: Matemáticas I

Fernando Chamizo   https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/

1. El algoritmo de eliminación de Gauss

Un *sistema de ecuaciones lineales* es una ecuación del tipo

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

donde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $\vec{b} \in \mathcal{M}_{m\times 1}$ son una matriz y un vector fijos y $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$ es un vector de incógnitas. Si desarrollas el producto $A\vec{x}$ verás que simplemente son m ecuaciones del tipo $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i$. La tabla de los coeficientes a_{ij} viene dada por la matriz A y si la extendemos con el vector $\vec{b}$ como última columna, decimos que es la *matriz ampliada* del sistema que se denota con A^+. Esto es, $A^+ = (A|\vec{b})$, donde la barra vertical no indica nada, es solo para separar.

Se dice que A es una *matriz escalonada* si sus filas nulas, si las hubiera, están al final y cada fila no nula tiene siempre más ceros a la izquierda que la que está encima. Para clarificar más la situación e ilustrar el nombre de "escalonada", aparte de la matriz nula, estas son todas las plantillas posibles para las matrices escalonadas 2×3 distintas de O:

$$\begin{pmatrix} p_1 & * & * \\ 0 & p_2 & * \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p_1 & * & * \\ 0 & 0 & p_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p_1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & p_1 & * \\ 0 & 0 & p_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & p_1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $*$ indican números cualesquiera y los p_i son no nulos. Estos números p_i que marcan el comienzo de un "escalón" se llaman *pivotes*. Es decir, los pivotes son los primeros valores no nulos de cada fila. Todo lo que hay bajo los escalones o a su izquierda son ceros y los escalones siempre deben tener altura uno.

Un sistema de ecuaciones lineales con matriz es escalonada es sencillo de resolver (dando por hecho que esto sea posible) porque la solución de la ecuación correspondiente al último pivote se puede sustituir en las anteriores para obtener un sistema con una incógnita menos y repetir el proceso tantas veces como pivotes haya. Esto es lo que se llama *sustitución regresiva*. Por ejemplo, consideremos el siguiente sistema con matriz escalonada

$$(1) \qquad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 2x_3 &= 6 \\ x_2 - x_3 &= -1 \\ 3x_3 &= -3 \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La última ecuación implica $x_3 = -1$ y al sustituir en las otras se obtiene

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 &=& 4 \\ x_2 &=& -2 \end{array} \qquad \text{con matriz} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo $x_2 = -2$ se sigue $x_1 = 1$ con lo que la solución es $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -1$.

Para practicar con los números complejos, consideremos el ejemplo mínimo

$$\begin{array}{rcl} (1+i)x_1 + 3ix_2 &=& 2+7i, \\ (1+2i)x_2 &=& 4+3i \end{array} \qquad \text{que tiene} \quad A = \begin{pmatrix} 1+i & 3i \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2+7i \\ 4+3i \end{pmatrix}.$$

Despejando x_2 de la segunda ecuación,

$$x_2 = \frac{4+3i}{1+2i} = \frac{(4+3i)(1-2i)}{1^2+2^2} = \frac{4+6+(3-8)i}{5} = 2-i$$

y al sustituir en la primera ecuación y despejar x_1,

$$x_1 = \frac{2+7i-3i(2-i)}{1+i} = \frac{2+7i-6i-3}{1+i} = \frac{(-1+i)(1-i)}{1^2+1^2} = \frac{-1+1+(1+1)i}{2} = i.$$

La *eliminación de Gauss* o *reducción de Gauss* es un sencillo algoritmo que se aplica a la matriz ampliada para transformar un sistema de ecuaciones lineales en otro equivalente con matriz de coeficientes escalonada y, por tanto, fácil de resolver (si realmente tiene solución). Consiste en ir generando ordenadamente en las columnas los ceros necesarios empleando las siguientes *transformaciones elementales* en la matriz ampliada:

1. Sumar a una fila un múltiplo de otra.
2. Multiplicar una fila por un número distinto de cero.
3. Intercambiar dos filas.

En realidad la segunda no es estrictamente necesaria. Para un sistema típico basta con la primera, aunque algunos requieren también la tercera.

Está claro que una solución del sistema lo seguirá siendo después de aplicar cualquiera de estas transformaciones, por tanto, no perdemos soluciones. También está claro que se pueden revertir, por tanto, tampoco introducimos soluciones extrañas.

Veamos cómo funciona sobre el sistema

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 - 2x_3 &=& 6 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 &=& 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &=& -11 \\ 10x_1 - 2x_2 - 10x_3 &=& 24 \end{array} \qquad \text{con} \qquad A^+ = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -4 & 4 \\ -2 & 3 & 3 & -11 \\ 10 & -2 & -10 & 24 \end{array}\right).$$

Cuando en un sistema hay más condiciones (ecuaciones) que incógnitas que hallar, lo natural es que no tenga solución, pero no siempre es así, como veremos en este ejemplo. Conservando la primera fila f_1, queremos crear ceros bajo $a_{11} = 2$, el primer pivote. Para ello aplicamos la primera transformación elemental en la forma $f_2 \mapsto f_2 - f_1$, $f_3 \mapsto f_3 + f_1$, $f_4 \mapsto f_4 - 5f_1$. Así pues

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -4 & 4 \\ -2 & 3 & 3 & -11 \\ 10 & -2 & -10 & 24 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{array}\right).$$

Aunque no sea necesario, para tratar con números enteros pequeños, apelemos a la segunda transformación elemental efectuando $f_2 \mapsto f_2/2$ y $f_4 \mapsto f_4/3$. Tras ello, para crear ceros bajo el segundo pivote $a_{22} = 1$ aplicamos $f_3 \mapsto f_3 - 2f_2$, $f_4 \mapsto f_4 - f_2$:

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Por último, si $f_4 \mapsto f_4 - f_3/3$, la última fila se anula y llegamos a una forma escalonada como la de (1), así que la solución es como allí $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -1$.

Los números complejos solo añaden que los cálculos se nos puedan hacer más cuesta arriba dependiendo de nuestra experiencia. Veamos un ejemplo con dos incógnitas.

$$\begin{array}{rcl} (2-i)x_1 - x_2 & = & 2 \\ ix_1 + (1+i)x_2 & = & 1 \end{array} \qquad \text{con} \qquad A^+ = \left(\begin{array}{cc|c} 2-i & -1 & 2 \\ i & 1+i & 1 \end{array}\right).$$

En principio lo natural es proceder con $f_2 \mapsto f_2 - if_1/(2-i)$, pero dividir por $2-i$ no hace mucha gracia mientras que todos deberíamos saber la tabla de dividir por i que se reduce a $1/i = -i$. Así que para hacer los cálculos a mano es más conveniente intercambiar las dos filas apelando a la tercera transformación elemental. Con ello, una posibilidad para la reducción de Gauss es

$$A^+ \underset{f_1 \leftrightarrow f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} i & 1+i & 1 \\ 2-i & -1 & 2 \end{array}\right) \underset{f_2 \mapsto f_2 + (1+2i)f_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} i & 1+i & 1 \\ 0 & -2+3i & 3+2i \end{array}\right).$$

El $1+2i$ proviene de $-(2-i)/i = i(2-i)$. De la segunda fila se deduce a simple vista $x_2 = -i$ y si tu simple vista no funciona aquí, haz el cálculo que necesites. Sustituyendo se sigue $x_1 = 1$.

La tercera transformación elemental, aparte de para simplificar cálculos, se usa cuando en el lugar en que debiera haber un pivote hay un cero. Para ver este punto y además un caso en que hay infinitas soluciones, consideremos el ejemplo:

$$\begin{aligned} 2x_2+x_3 &= 3 \\ x_1+x_2-3x_3 &= -1 \\ x_1+3x_2-2x_3 &= 2 \end{aligned} \qquad \text{con} \qquad A^+=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right).$$

No podemos tomar a_{11} como pivote porque es nulo. Para remediarlo, intercambiamos las dos primeras filas y después aplicamos, como antes, la eliminación de Gauss con la primera transformación elemental:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right) \underset{f_3\mapsto f_3-f_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{f_3\mapsto f_3-f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Así se tiene que x_3 es arbitrario, lo cual viene heredado de que la fila nula se lee como la trivialidad $0\cdot x_3=0$ que se cumple para todo x_3. Así pues, escribamos $x_3=\lambda$ (donde λ indica un número arbitrario). Entonces $x_2=(3-\lambda)/2$. Sustituyendo en la primera ecuación se deduce que la solución general es

$$x_1=\frac{7\lambda-5}{2}, \qquad x_2=\frac{3-\lambda}{2}, \qquad x_3=\lambda.$$

La incógnita x_3 estrictamente no la hemos hallado, solo la hemos cambiado de nombre y hemos despejado x_1 y x_2 en términos de ella. En general, *solo despejamos las variables correspondientes a pivotes*.

Dando a λ valores enteros impares obtenemos soluciones enteras sencillas. Por ejemplo, $\lambda=1,3,5$ conducen a las soluciones $(1,1,1)^t$, $(8,0,3)^t$, $(15,-1,5)^t$. Asignar algún valor sencillo a los parámetros y comprobar que el resultado satisface la ecuación, apenas requiere esfuerzo y es una buena garantía de que no nos hemos equivocado en los cálculos de la eliminación de Gauss.

Los sistemas de ecuaciones lineales no siempre tienen solución. Un ejemplo muy tonto es $x_1+x_2=1$, $x_1+x_2=0$. Veamos lo que ocurre con la eliminación de Gauss en un ejemplo con nuestros números complejos. Consideremos el sistema 2×2 que tiene como matriz ampliada

$$A^+=\left(\begin{array}{cc|c} 6-4i & 9+7i & 5+i \\ 6+2i & 10i & 1+2i \end{array}\right).$$

Procedamos sin ningún truco, con el paso natural $f_2\mapsto f_2-(6+2i)f_1/(6-4i)$ que lleva al cálculo

$$\frac{6+2i}{6-4i}=\frac{(6+2i)(6+4i)}{6^2+4^2}=\frac{28+36i}{52}=\frac{7+9i}{13}.$$

Por otro lado,

$$\frac{7+9i}{13}\cdot(9+7i)=10i \qquad \text{y} \qquad \frac{7+9i}{13}\cdot(5+i)=2+4i.$$

Así pues, el resultado del primer y único paso de la reducción de Gauss es

$$A^+ \underset{f_2 \mapsto f_2 - \frac{7+9i}{13} f_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 6-4i & 9+7i & 5+i \\ 0 & 0 & -1-2i \end{array}\right).$$

La última fila nos dice que $0 = -1 - 2i$, lo cual es una contradicción.

2. La solución general de sistema

El propósito de este apartado es dar un enunciado teórico acerca de la estructura de las soluciones de los sistemas lineales que será útil a lo largo del curso.

En el estudio de esta estructura desempeña un papel muy importante el número de pivotes (escalones) al aplicar eliminación de Gauss a una matriz A. Llamaremos a este número *rango* de A, y escribiremos $\mathrm{rg}(A)$. Para tranquilidad del que diga "así no es como me lo explicaron a mí", más adelante en el curso veremos otra definición equivalente. Para estudiantes avanzados que quieran saber por qué está bien definido, es decir, por qué a mí a y mi primo nos tiene que dar lo mismo aunque apliquemos diferentes formas de la reducción de Gauss, la recomendación es que piensen en términos de soluciones de sistemas.

El resultado anunciado es el siguiente:

Un sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{b}$ con $\mathrm{rg}(A) = r$ y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ tiene solución si y solo si $r = \mathrm{rg}(A^+)$. En ese caso, eligiendo una solución $\vec{x}_0$, todas las soluciones vienen dadas por

$$\vec{x}_0 + \sum_{j=1}^{n-r} \lambda_j \vec{v}_j$$

con λ_j arbitrarios y $\vec{v}_j$ ciertos vectores. Además elecciones distintas de los λ_j dan lugar a soluciones distintas. Para $n - r = 0$ se entiende que el sumatorio (que es vacío) no aparece, esto es, que la solución es única.

Si tienes alma de matemático, entenderás que este enunciado una forma sintética de recoger las conclusiones obtenidas al aplicar la reducción de Gauss. Nota que siempre $n \ge r$ porque con n columnas caben a lo más n escalones.

Una observación importante para este curso es que los sistemas de la forma $A\vec{x} = \vec{0}$, l llamados *sistemas homogéneos*, siempre tienen la solución $\vec{x}_0 = \vec{0}$ y así, cuando esta no es la única solución, todas las soluciones vienen dadas por el sumatorio.

Una consecuencia del resultado anterior que casi siempre sirve para resolver un problema de las pruebas de acceso a la universidad se llama *teorema de Rouché-Frobenius* en los países de habla hispana aunque el matemático F.G. Frobenius no tenga tanto que ver con este resultado[1]:

[1]Parece que el nombre fue introducido por el matemático hispanoargentino J. Rey Pastor. En el mundo anglosajón se llama *teorema de Rouché-Capelli*, lo que es mucho más lógico porque tanto E. Rouché como A. Capelli lo enunciaron y demostraron, aunque no fueran los primeros en hacerlo.

Dado un sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{b}$ *con* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *se cumple:*

1) *Tiene solución única, y se dice que es* compatible determinado*, si y solo si* $n = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^+)$.

2) *Tiene infinitas soluciones, y se dice que es* compatible indeterminado*, si y solo si* $n > \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^+)$.

3) *No tiene solución, y se dice que es* incompatible*, si y solo si* $\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(A^+)$.

El hecho de que el resultado principal sea teórico, no impide dar algunos ejemplos. Para comenzar fuerte, veamos uno con números complejos.

Consideramos el sistema

$$\begin{array}{lcr} x_1 - ix_2 + x_3 & = & 3+i, \\ x_1 + ix_2 + (1-i)x_3 & = & 2+i, \\ ix_1 + x_2 + ix_3 & = & -1+3i. \end{array}$$

La eliminación de Gauss para obtener la forma escalonada se reduce a:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -i & 1 & 3+i \\ 1 & i & 1-i & 2+i \\ i & 1 & i & -1+3i \end{array}\right) \underset{\substack{f_2\mapsto f_2-f_1 \\ f_3\mapsto f_3-if_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -i & 1 & 3+i \\ 0 & 2i & -i & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Si solo deseamos discutir el sistema, los dos pivotes muestran $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^+) = 2$, donde $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ es la matriz de coeficientes, y por tanto el sistema es compatible indeterminado. El resultado de estructura, nos asegura que todas las soluciones $\vec{x}$ vienen descritas por $\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda\vec{v}$ donde $\lambda \in \mathbb{C}$ es arbitrario. Para obtener unos posibles $\vec{x}_0$ y $\vec{v}$, tenemos que terminar de resolver el sistema. Siguiendo el procedimiento habitual, tomamos $x_3 = \lambda$. La segunda fila nos dice $2ix_2 = -1 + i\lambda$, que dividiendo entre $2i$ da $x_2 = (i+\lambda)/2$ y sustituyendo en la ecuación correspondiente a la primera fila obtenemos $x_1 = i - \lambda + (5 + i\lambda)/2$. En definitiva, todas las soluciones son

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5/2+i \\ i/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1+i/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Por ejemplo, para $\lambda = i$ se obtiene $\vec{x} = (2, i, i)^t$, que claramente cumple las ecuaciones. Con la notación del resultado, $n = 3$, $r = 2$, $\vec{x}_0 = \big(\frac{5}{2} + i, \frac{i}{2}, 0\big)^t$ y $\vec{v}_1 = \big(-1 + \frac{i}{2}, \frac{1}{2}, 1\big)^t$.

Terminamos con un ejemplo correspondiente al sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 4 & -6 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & -7 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

La forma escalonada se consigue con los siguientes pasos:

$$A \xrightarrow[\substack{f_2\mapsto f_2+3f_1\\ f_3\mapsto f_3-2f_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3\mapsto f_3-3f_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Las columnas que no contienen pivotes son la segunda y la cuarta y corresponden a parámetros libres, así $x_2 = \lambda_1$, $x_4 = \lambda_2$, mientras que despejando x_1, x_3 y x_4 utilizando las ecuaciones de abajo a arriba, $x_5 = 0$, $x_3 = 0$, $x_1 = -\lambda_1 - 2\lambda_2$. Con ello

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 - 2\lambda_2\\ \lambda_1\\ 0\\ \lambda_2\\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2\\ 1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1\\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2\\ 0\\ 0\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}.$$

El paso intermedio es solo para practicar con el producto de matrices, está claro que las coordenadas de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, los dos últimos vectores columna, vienen dadas por los coeficientes de λ_1 y λ_2 en la expresión inicial para $\vec{x}$.

3. La matriz inversa

La eliminación de Gauss puede dar diferentes matrices escalonadas dependiendo de cómo procedamos. Eso sí, al aplicarla para resolver un sistema siempre conducirá a la misma solución. Un ejemplo sencillo es $2x_1 + x_2 = 4$, $x_1 + x_2 = 3$. En un paso de reducción de Gauss se llega a la matriz escalonada y, con ella, a la solución:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[f_2\mapsto f_2-\frac{1}{2}f_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4\\ 0 & 1/2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \quad x_1 = 1,\ x_2 = 2,$$

pero si quieres evitar la aparición de fracciones quizá encuentres más conveniente un paso previo:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[f_1\leftrightarrow f_2]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[f_2\mapsto f_2-2f_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \quad x_1 = 1,\ x_2 = 2.$$

Las matrices escalonadas finales tienen la misma estructura, pero son bien distintas.

Una manera de forzar la unicidad de la forma escalonada es que, una vez aplicada la eliminación de Gauss a nuestro gusto, utilicemos la segunda transformación elemental para que todos los pivotes sean unos y la primera transformación elemental para que todos los números encima de cada pivote sean ceros. De esta forma, los unos que conforman los pivotes son los únicos elementos no nulos en su columna. Por ejemplo, para matrices 2×3 distintas de O todos los posibles resultados son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $*$ indican números cualesquiera.

Se dice que esta forma extendida de la eliminación de Gauss es la *eliminación de Gauss-Jordan* o la *reducción de Gauss-Jordan*. La matriz resultante se dice que es la *forma escalonada reducida* de la matriz de partida.

Seguro que te estás preguntando qué tiene esto de particular. En primer lugar, da las soluciones de un sistema directamente, sin necesidad de sustituir, en segundo lugar permite resolver varios sistemas al tiempo si comparten la misma matriz (esto es lo más importante en la práctica) y finalmente, es útil para el cálculo de la matriz inversa de la que habla el título de este apartado (esto es lo más importante aquí).

Veamos primero cómo funciona la reducción de Gauss-Jordan en el ejemplo anterior. Con la primera matriz escalonada:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{f_1 \mapsto f_1/2 \\ f_2 \mapsto 2f_2}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{f_1 \mapsto f_1 - f_2/2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & \mathbf{2} \end{array}\right).$$

El primer paso fuerza a que los pivotes sean 1 y el otro, crea un cero encima del segundo pivote. La solución se lee directamente en la última columna, marcada en negrita.

Con la segunda matriz escalonada se obtiene el mismo resultado por otro camino:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \underset{f_2 \mapsto -f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{f_1 \mapsto f_1 - f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & \mathbf{2} \end{array}\right).$$

A pesar de que la eliminación de Gauss-Jordan evita la sustitución regresiva ofreciendo directamente la solución (también la evita con pequeñas variaciones en el caso de infinitas soluciones), desde el punto de vista computacional lo que uno gasta en extender el algoritmo de Gauss al de Gauss-Jordan es comparable a lo que gasta en sustitución regresiva. Más interesante es que la eliminación de Gauss-Jordan permite resolver simultáneamente varios sistemas con la misma matriz de coeficientes, una situación común en algunos problemas de ingeniería. En breve, para resolver

$$A\vec{x} = \vec{b}_1, \qquad A\vec{x} = \vec{b}_2, \qquad \dots \qquad A\vec{x} = \vec{b}_k,$$

se aplica eliminación de Gauss-Jordan a $(A|\vec{b}_1\vec{b}_2 \dots \vec{b}_k)$.

Un ejemplo sencillo es la resolución simultánea de los tres sistemas

$$\left\{ \begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 = 7, \\ 3x_1 - x_2 = 5, \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 = 11, \\ 3x_1 - x_2 = 0, \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 = 2, \\ 3x_1 - x_2 = 3. \end{array} \right.$$

La reducción de Gauss de $(A|\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3)$, resumiendo dos pasos en uno, es

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 3 & 7 & 11 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 0 & 3 \end{array}\right) \underset{f_2\mapsto 2f_2-3f_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 3 & 7 & 11 & 2 \\ 0 & -11 & -11 & -33 & 0 \end{array}\right).$$

Ahora debemos multiplicar la primera fila por $1/2$ y la segunda por $-1/11$ para que los pivotes sean uno y después crear un cero encima del segundo pivote:

$$\underset{\substack{f_1\mapsto f_1/2 \\ f_2\mapsto -f_2/11}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3/2 & 7/2 & 11/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{f_1\mapsto f_1-3f_2/2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Por tanto, las soluciones de los sistemas son $(x_1, x_2) = (2,1)$, $(1,3)$, $(1,0)$.

Ahora vamos, por fin, con el tema principal de este apartado. Dada un matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n$, se dice que $A^{-1} \in \mathcal{M}_n$ es su *matriz inversa* si $A^{-1}A = I$ y $AA^{-1} = I$.

En realidad, basta con que cumpla una de las igualdades porque se puede probar que una implica la otra (aunque no es en absoluto evidente). Dos propiedades de la inversa con respecto al producto y a la traspuesta que es conveniente memorizar (o razonar) son:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \qquad \text{y} \qquad \left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t.$$

No todas las matrices de $\mathcal{M}_n$ tienen inversa. Un resultado afirma que *la condición necesaria y suficiente para la existencia de inversa es que* $\operatorname{rg}(A) = n$ *(que el rango sea máximo)*. Más adelante veremos una caracterización con determinantes que quizá te resulte más familiar. También puede que recuerdes una fórmula con determinantes para calcular inversas. En el caso de $\mathcal{M}_2$ afirma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad ad - bc \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Además, si $ad - bc = 0$ no existe la inversa.

Por ejemplo, se puede comprobar con esta fórmula que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1+2i & -2 \\ -2+2i & -1-2i \end{pmatrix}$$

tiene la curiosa propiedad de que coincide con su inversa, $A = A^{-1}$. La única operación relevante a hacer es

$$(1+2i)(-1-2i) - (-2)(-2+2i) = (3-4i) - (4-4i) = -1.$$

Para dimensiones mayores, cuando uno pide a un ordenador que calcule una matriz inversa, no utilizará esa fórmula que quizá recuerdes con determinantes, porque da lugar a una cantidad ingente de cálculos. Para matrices generales procederá por eliminación de Gauss-Jordan.

La idea es la siguiente: calcular la inversa de $A \in \mathcal{M}_n$ es lo mismo que resolver $AX = I$ donde $X \in \mathcal{M}_n$ es una matriz de incógnitas. Separando las columnas de X y de I obtenemos que hay que resolver n sistemas con la misma matriz de coeficientes. Si lo piensas, tras esta interpretación, se tiene el siguiente algoritmo para calcular la inversa:

$$\big(A|I\big) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \big(I|A^{-1}\big).$$

La condición $\text{rg}(A) = n$ para que exista la inversa de $A \in \mathcal{M}_n$ proviene de que en otro caso no podríamos conseguir la identidad en el lado derecho, ya que esta tiene n escalones.

Calculemos por eliminación de Gauss-Jordan la inversa de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Primero aplicamos la reducción de Gauss a $(A|I)$,

$$(A|I) \underset{\substack{f_2 \mapsto f_2 - 2f_1 \\ f_3 \mapsto f_3 + f_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{f_3 \mapsto f_3 - 3f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

Los pivotes ya son unos y solo resta crear los ceros encima de ellos:

$$\underset{f_1 \mapsto f_1 - 2f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{f_1 \mapsto f_1 + 7f_3 \\ f_2 \mapsto f_2 - 3f_3}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 54 & -23 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -23 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

En definitiva,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 54 & -23 & 7 \\ -23 & 10 & -3 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para dar publicidad (un poco engañosa) al método, supongamos que queremos calcular la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Este es un ejemplo muy particular pues contiene muchos ceros y entonces los determinantes que tendrías que calcular, si reniegas de Gauss-Jordan, son bastante inmediatos. De todas formas, habría que considerar, aunque fuera mentalmente, 17 determinantes, lo cual no puede competir con la simplicidad de

$$(A|I) \underset{f_1 \leftrightarrow f_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{f_3 \leftrightarrow f_4}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{c|cccc} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ I & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

La inversa es la matriz que ha quedado a la derecha.

En favor de lo que ya conoces, sí es cierto, como hemos visto, que apenas requiere esfuerzo escribir la fórmula general para la inversa de una matriz 2×2 si hemos memorizado la fórmula con determinantes. De todas formas, evidentemente, el resultado es el mismo si aplicamos eliminación de Gauss-Jordan. Por ejemplo, para

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{la fórmula da directamente} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

donde se ha usado $2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 1$. Para proceder por Gauss-Jordan, efectuamos primero eliminación de Gauss y parece conveniente usar un paso previo de intercambiar las filas para que no aparezcan denominadores:

$$(A|I) \underset{f_1 \leftrightarrow f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{f_2 \mapsto f_2 - 2f_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Para completar Gauss-Jordan, cambiamos de signo f_2 para conseguir que el pivote sea 1 y creamos el cero encima de él:

$$\underset{f_2 \mapsto -f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \underset{f_1 \mapsto f_1 - 3f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) = (I|A^{-1}).$$

Como esperábamos, el resultado es el mismo que antes.