Hoja 3

1) Calcula los siguientes determinantes tratando de hacer las menos cuentas posibles ayudándote de las propiedades:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}.$$

2) Sea $A \in \mathcal{M}_n$ si $|A| = d$, ¿cuál es el determinante de $-A$? Utiliza este resultado para demostrar que cuando n es impar todas las matrices que cumplen $A = -A^t$ (llamadas *antisimétricas*) tienen determinante nulo.

3) Sea $U \in \mathcal{M}_{1\times n}$ una matriz fila con todos sus elementos iguales a uno. Describe qué aspecto tiene la matriz $A = xI_n + U^tU$ donde $x \in \mathbb{R}$ y muestra que se cumple la fórmula $|A| = x^n + nx^{n-1}$. Indicación: Comienza sumando a la primera columna el resto.

4) Halla el determinante de $B^t A^{2025} B^{2026} \overline{A}^t$ (la barra indica conjugación) donde

$$A = \begin{pmatrix} 5+3i & 3+2i \\ 2+3i & 1+2i \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 3+2i & 5+3i \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

5) Si $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ son dos puntos distintos del plano, explica por qué los puntos (x, y) que verifican

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & p_1 & q_1 \\ y & p_2 & q_2 \end{vmatrix} = 0$$

son justamente los de la recta que pasa por P y por Q.

6) Sea $\mathcal{T}$ el triángulo determinado por los vectores $\vec{v}_1 = (3, 2)^t$ y $\vec{v}_2 = (7, 5)^t$. Calcula su área y el área de $f(\mathcal{T})$ donde f es la aplicación lineal

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 13 & 7 \end{pmatrix}.$$

7) Halla todos los posibles valores de x de forma que el paralelepípedo generado por los vectores $\vec{v}_1 = (x, 5, 0)^t$, $\vec{v}_2 = (3, 9, 2)^t$ y $\vec{v}_3 = (2, 6, 1)^t$, tenga volumen 1.

8) Supongamos que una matriz 3×3 tiene determinante 10. ¿Cuál es el determinante de la matriz formada por sus cofactores?

9) Halla el volumen de un tetraedro cuyos cuatro vértices son los puntos $(4, 3, 1)$, $(-7, 6, 4)$. $(1, 1, 1)$ y $(2, 1, 1)$.

10) Discute el rango de las siguientes matrices en función de x usando determinantes

$$\begin{pmatrix} 3 & x+7 & -3 & 2 \\ 7 & 4 & x & 5 \\ 2 & 11 & -7 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 2x-2 & 5x-5 & x-1 \\ 9x-5 & 25x-15 & -2x \\ 4x-2 & 11x-6 & -x \end{pmatrix}.$$

11) Empleando determinantes, halla las matrices inversas de

$$\begin{pmatrix} 2 & 25 & 10 \\ 1 & 15 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & 15 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

12) Explica por qué ninguna matriz $A \in \mathcal{M}_5$ que tenga $a_{ij} = 0$ para los i, j tales que $\max(i, j) \leq 3$ es invertible.

13) Resuelve los siguientes sistemas usando la regla de Cramer:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 3x_1 - 2x_2 & = & 1, \\ 9x_1 - 7x_2 & = & -4, \end{array} \right. \qquad \text{y} \qquad \left\{ \begin{array}{rcr} 4x_1 - x_2 + x_3 & = & 4, \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = & 3, \\ 4x_1 - 4x_2 + 5x_3 & = & -4. \end{array} \right.$$

14) Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matriz simétrica ($A = A^t$) con $a_{rs} = r - s$ para $r \geq s$. Demuestra que su determinante es $(-1)^{n+1}(n-1)2^{n-2}$. Indicación: Efectúa la operación de filas $f_j \mapsto f_j + f_1$, mueve la última fila al primer lugar y aplica eliminación de Gauss.