

12) Decide si el endomorfismo $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ definido por la fórmula $f(P) = P + (x^2 + 1)P'' + (5x + x^3)P'''$ es biyectivo. Halla P tal que $f(P) = 3 + x + 3x^2$.

Tomamos $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$, que es la base más sencilla de $\mathbb{R}_3[x]$. Evaluamos f en cada uno de sus elementos y hallamos las coordenadas del resultado, que con la base $\mathcal{B}$ se reducen a los coeficientes escritos de menor a mayor grado:

$$\begin{array}{llll} f(1) & = & 1 & \text{coordenadas: } 1, 0, 0, 0 \\ f(x) & = & x & \text{coordenadas: } 0, 1, 0, 0 \\ f(x^2) & = & 2 + 3x^2 & \text{coordenadas: } 2, 0, 3, 0 \\ f(x^3) & = & 36x + 13x^3 & \text{coordenadas: } 0, 36, 0, 13 \end{array}$$

Colocando las coordenadas ordenadamente en columna, obtenemos que la matriz del endomorfismo es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 36 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}.$$

Ya está en forma escalonada. Como $\text{rg}(A) = 4$ se sigue $\dim \text{Im}(f) = 4$ y $\dim \text{Ker}(f) = \dim \mathbb{R}_3[x] - 4 = 0$. Por tanto, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_3[x]$ (ya que es subespacio y las dimensiones coinciden) y $\text{Ker}(f) = \{0\}$. Así pues, es sobreyectiva y inyectiva, equivalentemente, es biyectiva.

El polinomio $3 + x + 3x^2$ tiene como coordenadas (escritas en columna) $\vec{b} = (3, 1, 3, 0)^t$. Para hallar una preimagen resolvemos $A\vec{x} = \vec{b}$. Este sistema es casi trivial y tiene como solución $\vec{x} = (1, 1, 1, 0)^t$. El polinomio buscado es el que tiene estas coordenadas en la base $\mathcal{B}$, esto es, $1 + x + x^2$.