

7) Calcula una base y la dimensión del subespacio de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ formado por las matrices simétricas cuya suma de columnas sea $\vec{0}$, el vector nulo. Recuerda que se llaman matrices simétricas a las que cumplen $A = A^t$.

Podemos representar este subespacio con ecuaciones de la siguiente manera:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_5 + x_6 = 0 \end{array} \right\}.$$

La matriz asociada al sistema (de tres ecuaciones y seis incógnitas) es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

que ya está en forma escalonada. Los pivotes están en las tres primeras columnas, por tanto asignamos $x_4 = \lambda_1$, $x_5 = \lambda_2$, $x_6 = \lambda_3$, de donde, $x_3 = -\lambda_2 - \lambda_3$, $x_2 = -\lambda_1 - \lambda_2$, $x_1 = \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3$. Por tanto,

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & -\lambda_1 - \lambda_2 & -\lambda_2 - \lambda_3 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3$$

con

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La base buscada es $\mathcal{B} = \{M_1, M_2, M_3\}$.