Soluciones

1) En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual consideramos los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y el subespacio W dados por

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad W = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 & = & 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 6x_4 & = & 0 \end{array} \right\}.$$

a) [3 puntos] Encuentra un vector $\vec{w} \in W$ con $\|\vec{w}\| = 5$ que sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) [0.5 puntos] ¿Es $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ una base ortogonal de W?

---

a) El vector $\vec{w}$ buscado debe satisfacer las dos ecuaciones de W. Las condiciones de ortogonalidad añaden dos nuevas ecuaciones correspondientes a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ puestos en fila. Con ello, tenemos que resolver:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2 \mapsto f_2 - 2f_1 \\ f_3 \mapsto f_3 - f_1 \\ f_4 \mapsto f_4 - f_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_3 \mapsto f_3 - 2f_2 \\ f_4 \mapsto f_4 + f_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, $f_3 \leftrightarrow f_4$ da la forma escalonada y asignando $x_4 = \lambda$, por sustitución regresiva, de $-x_3 + 4x_4 = 0$ se obtiene $x_3 = 4\lambda$, de la segunda ecuación $x_2 = 2\lambda$ y de la primera $x_1 = 2\lambda$. En definitiva, todos los $\vec{w} \in W$ ortogonales a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son aquellos de la forma $\vec{w} = \lambda(2, 2, 4, 1)^t$. Al imponer $\|\vec{w}\| = 5$ se sigue $\lambda^2(2^2 + 2^2 + 4^2 + 1^2) = 5^2$ que equivale a $\lambda^2 = 1$. Así que podemos tomar $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$. Por tanto, las posibles soluciones son $\vec{w} = \pm(2, 2, 4, 1)^t$.

b) No puede ser base de W ya que $\vec{u}$ no satisface las ecuaciones que definen W.

---

2) Consideremos las matrices y el vector

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

a) [2 puntos] Halla $C, D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ con D diagonal tales que $A = CDC^{-1}$.
b) [1.5 puntos] Calcula $BA^{2025}\vec{v}$.

---

a) Resolvemos la ecuación característica para calcular los autovalores:

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 6 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1.$$

Los autovectores son soluciones no triviales de los sistemas $(A - \lambda_j I)\vec{x} = \vec{0}$ para $j = 1, 2$:

$$\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}.$$

Elecciones naturales son $\vec{v}_1 = (1,1)^t$ y $\vec{v}_2 = (2,1)^t$. La C se forma colocando los autovectores en sus columnas y la D con los autovalores respectivos, esto es,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) [Solución ingeniosa casi sin cálculos] Como $\vec{v}$ es proporcional a $\vec{v}_2$, es autovector con autovalor $\lambda_2 = -1$, esto es, $A\vec{v} = -\vec{v}$, lo que implica, aplicando A sucesivas veces, $A^{2025}\vec{v} = (-1)^{2025}\vec{v}$. Así pues, la cantidad del enunciado es $-B\vec{v} = (2,2)^t$.

[Solución más mecánica] Sabemos por la teoría que $A^{2025} = CD^{2025}C^{-1}$, entonces hay que calcular $BCD^{2025}C^{-1}\vec{v}$. Efectuando los dos primeros y los dos últimos productos,

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad C^{-1}\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Para la segunda no hace falta calcular la inversa, solo resolver $C\vec{x} = \vec{v}$ que es obvio que tiene solución $x_1 = 0$, $x_2 = -2$. Entonces el vector buscado es

$$BCD^{2025}C^{-1}\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{2025} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

---

3) [$3 = 1 + 1 + 1$ puntos] Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En las dos primeras no es necesario justificar nada y un error penaliza $-0{,}5$ (dejarlo en blanco no descuenta). En la tercera se requiere una breve justificación (una explicación si es cierta o un contraejemplo si es falsa) y no hay penalización por error.

- V. ■ F. □ El triángulo de vértices $(1,4)$, $(7,9)$, $(5,7)$ tiene área 1.

  [Porque la mitad del determinante con columnas $(7-1, 9-4)$ y $(5-1, 7-4)$ tiene valor absoluto 1.]

- V. □ F. ■ Siempre que $A, B \in \mathcal{M}_2$ se cumple $|A^2 - B^2| = |A+B||A-B|$.

  [Por ejemplo, tomando $A = B^t = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ se tiene $A^2 = B^2 = O$ y el primer miembro es cero mientras que $A + B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y $A - B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ implican que el segundo es -1.]

- V. ■ F. □ La matriz $A = I - 2\|\vec{v}\|^{-2}\vec{v}\vec{v}^{\,t}$ es ortogonal para cualquier $\vec{v} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$.

  Nota: $\vec{v}^{\,t}$ significa la traspuesta cuando $\vec{v}$ se considera como matriz columna en $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

Justificación: Hay que ver si se cumple $AA^t = I$. Operando:

$$AA^t = \Big(I - \frac{2\vec{v}\vec{v}^{\,t}}{\|\vec{v}\|^2}\Big)\Big(I - \frac{2\vec{v}\vec{v}^{\,t}}{\|\vec{v}\|^2}\Big) = I - \frac{4\vec{v}\vec{v}^{\,t}}{\|\vec{v}\|^2} + \frac{4\vec{v}\vec{v}^{\,t}\vec{v}\vec{v}^{\,t}}{\|\vec{v}\|^4}.$$

Usando $\vec{v}^{\,t}\vec{v} = v_1^2 + \cdots + v_n^2 = \|\vec{v}\|^2$, los dos últimos términos se cancelan y queda I.

Criterios de corrección y comentarios

En Moodle he puesto comentarios personalizados explicando todos los errores. Indico las penalizaciones genéricas. Hay algunas excepciones porque tengo en cuenta la coherencia global de cada ejercicio.

Ejercicio 1.

• (a) Un error de cálculo descuenta 0,5.

• (b) No hay puntuación confundiendo $\vec{v}$ y $\vec{w}$ o pensando que no son ortogonales. Necesariamente lo son por la definición de $\vec{w}$ en la primera parte.

Ejercicio 2.

• (a), (b) Un error de cálculo descuenta 0,5.

• (a) Hay una cosa que no he penalizado, aunque lo he dudado hasta el último momento. Al imponer las condiciones de ortogonalidad y la pertenencia al subespacio, se obtiene un vector multiplicado por un parámetro λ que hay que ajustar con la condición $\|\vec{w}\| = 5$. Algunos quitáis el parámetro, lo que casualmente funciona porque $\lambda = 1$. En muchos casos no me queda claro si os resulta evidente que esa elección es válida o si consideráis que, en general, no habría que ajustar λ.

• (b) Algunos olvidáis la matriz C o bien porque os despistáis o bien porque pensáis que $A^{2025} = D^{2025}$. La penalización es de 0,75. Mucho peor es creer que A^{2025} se calcula elevando cada uno de sus elementos a 2025. Casi siempre he asignado la calificación 0 en ese caso.

• (b) La mayoría hacéis las cuentas de una forma muy poco económica. Por supuesto, no penaliza, pero incrementa la posibilidad de errores de cálculo. Os recomiendo que miréis la solución. Además de la que la sigue fielmente la teoría, he incluido otra, que a nadie se le ha ocurrido, con la que el problema se podría hacer de cabeza, prácticamente sin cálculos.

Ejercicio 3.

• (a), (b), (c). Una posible calificación total negativa no afecta al resto de los ejercicios. Por ejemplo, con tres errores se asigna al ejercicio la puntuación 0 en el cómputo global.

• (a), (b). Aquí no se requería justificación. Como se indica en el enunciado, la contabilidad es 1 por acierto, 0 por blanco y $-0{,}5$ por fallo.

• (c) Pensé que os sería más asequible, pero muy pocos lo habéis resuelto, en gran medida porque tenéis dudas con la definición de matriz ortogonal o con el producto del enunciado. Aparte del punto completo a los que lo han resuelto, he calificado con 0,5 a los que justifican correctamente solo el caso $n = 2$. En el resto de las situaciones lo puntúo con 0. En particular, no cuenta nada dar un ejemplo.