Soluciones

1) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} i & -1-i \\ 2i & -1-2i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

a) [2 puntos] Encuentra $\vec{x}$ tal que $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2+3i \\ 1+6i \end{pmatrix}$.

b) [1.5 puntos] Calcula $\operatorname{rg}(I + A^2)$.

---

a) Por eliminación de Gauss

$$A^+ = \left(\begin{array}{cc|c} i & -1-i & 2+3i \\ 2i & -1-2i & 1+6i \end{array}\right) \xrightarrow[f_2 \mapsto f_2 - 2f_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} i & -1-i & 2+3i \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

La segunda fila se traduce en $x_2 = -3$ y sustituyendo en la ecuación correspondiente a la primera, $ix_1 + (-1-i)(-3) = 2 + 3i$. Operando, $ix_1 = 2 + 3i - (3 + 3i) = -1$, de donde $x_1 = -1/i = i$ porque $i \cdot i = -1$. En definitiva, $\vec{x} = (i, -3)^t$.

b) Multiplicando A por sí misma se obtiene

$$A^2 = \begin{pmatrix} i & -1-i \\ 2i & -1-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -1-i \\ 2i & -1-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^2 - 2i - 2i^2 & -i - i^2 + 1 + 2i + i + 2i^2 \\ 2i^2 - 2i - 4i^2 & -2i - 2i^2 + 1 + 4i + 4i^2 \end{pmatrix}$$

y, al sustituir $i^2 = -1$,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1-2i & 2i \\ 2-2i & -1+2i \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$I + A^2 = \begin{pmatrix} 2-2i & 2i \\ 2-2i & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow[f_2 \mapsto f_2 - f_1]{} \begin{pmatrix} 2-2i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que implica $\operatorname{rg}(I + A^2) = 1$ porque solo hay un escalón.

---

2) Considera $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ y $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R}^2$ definida por $f\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a+b\\c+d\end{pmatrix}$.

a) [2 puntos] Comprueba que los elementos de $\mathcal{B}$ son linealmente independientes en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) [1.5 puntos] Escribe la matriz de la aplicación lineal f cuando en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se emplea la base $\mathcal{B}$ y en $\mathbb{R}^2$ la base canónica $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$. Calcula $\dim\operatorname{Im}(f)$ usando dicha matriz.

---

a) Hay que comprobar que

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

solo tiene la solución trivial $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$. Operando, cada elemento da lugar a una ecuación del sistema homogéneo:

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0,\quad 2\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4=0,\quad \lambda_1+3\lambda_2=0,\quad 2\lambda_2+\lambda_4=0.$$

Al aplicar eliminación de Gauss a su matriz de coeficientes se tiene

$$\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&2&-1&1\\1&3&0&0\\0&2&0&1\end{pmatrix}\underset{f_3\mapsto f_3-f_1}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&2&-1&1\\0&2&-1&0\\0&2&0&1\end{pmatrix}\underset{\substack{f_3\mapsto f_3-f_2\\ f_4\mapsto f_4-f_2}}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&2&-1&1\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\underset{f_3\leftrightarrow f_4}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&2&-1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Como el rango es 4 (cuatro escalones) y coincide con el número de incógnitas, la solución trivial del sistema (la nula) es la única.

b) Llamemos $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$, como es habitual, a los vectores de la base canónica. La matriz M buscada tiene por columnas las coordenadas de las imágenes de los elementos de $\mathcal{B}$:

$$\left.\begin{aligned}
f\left(\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\right)&=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}&&=1\,\vec{e}_1+1\,\vec{e}_2\\
f\left(\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}\right)&=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}&&=3\,\vec{e}_1+5\,\vec{e}_2\\
f\left(\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}\right)&=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}&&=0\,\vec{e}_1+0\,\vec{e}_2\\
f\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\right)&=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}&&=1\,\vec{e}_1+1\,\vec{e}_2
\end{aligned}\right\}\Longrightarrow M=\begin{pmatrix}1&3&0&1\\1&5&0&1\end{pmatrix}$$

Sabemos que $\dim\operatorname{Im}(f)=\operatorname{rg}(M)$. Por eliminación de Gauss,

$$M\underset{f_2\mapsto f_2-f_1}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&3&0&1\\0&2&0&0\end{pmatrix}\Longrightarrow\dim\operatorname{Im}(f)=2.$$

---

3) [$3 = 1 + 1 + 1$ puntos] Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En las dos primeras no es necesario justificar nada y un error penaliza $-0{,}5$ (dejarlo en blanco no descuenta). En la tercera se requiere una breve justificación (un ejemplo si es cierta o una explicación si es falsa) y no hay penalización por error.

- V. ■ F. □ Las coordenadas del polinomio $3x^2 - 4x + 7$ son 2, 2, 5 en la base $\mathcal{B} = \{x - x^2, 1 - 3x, 1 + x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$.

  [Porque $2(x - x^2) + 2(1 - 3x) + 5(1 + x^2) = 3x^2 - 4x + 7$.]

- V. ■ F. □ $V = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \, : \, A + A^t = O\}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

  [Porque $A, B \in V \Rightarrow A + A^t = B + B^t = O \Rightarrow \lambda A + \mu B + (\lambda A + \mu B)^t = \lambda(A + A^t) + \mu(B + B^t) = O$ para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda A + \mu B \in V$.]

- V. ■ F. □ Existe una matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ distinta de O tal que $(I + A)^{-1} = I - A$.

  Justificación: Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ cumple $(I + A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que coincide con $I - A$.

Criterios de corrección

En Moodle he puesto comentarios personalizados explicando todos los errores. Tengo en cuenta la coherencia de cada ejercicio, con lo cual es imposible ser totalmente exhaustivo con los criterios. Indico las penalizaciones genéricas:

Ejercicio 1.

- (a) No operar $-1/i$ descuenta 0,5.
- (b) Cada error de cálculo con números complejos descuenta 0,5. En particular, tres invalidan el ejercicio. Se valora que el resultado sea coherente con los posibles errores de cálculo. Es decir, si un error de cálculo lleva a un rango erróneo, no se penaliza dos veces siempre que se proceda consecuentemente.

Ejercicio 2.

- (a) Confundir la independencia lineal de los cuatro vectores con la independencia lineal dos a dos descuenta 1,5.
- (b) Escribir la matriz traspuesta equivocando las filas y columnas descuenta 0,5.

Ejercicio 3.

- (a), (b), (c). Una posible calificación total negativa no afecta al resto de los ejercicios. Por ejemplo, con tres errores se asigna al ejercicio la puntuación 0 en el cómputo global.
- (a), (b). Aquí no se requería justificación. Como se indica en el enunciado, la contabilidad es 1 por acierto, 0 por blanco y $-0{,}5$ por fallo.
- (c) La justificación predomina sobre la respuesta. En particular, marcar verdadero y dar una explicación que sugiere que es falso, no cuenta nada. En unos pocos casos he asignado puntuaciones intermedias por justificaciones incompletas.