Soluciones

1) [2 puntos] Halla una base del núcleo y otra de la imagen del endomorfismo

$$f:\mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3 \qquad \text{dado por} \qquad f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -i & 2-i & 1 \\ 1-i & 3+i & 1+i \\ 0 & 0 & 2+3i \end{pmatrix} \vec{x} \quad \text{donde} \quad i^2=-1.$$

Si A es la matriz indicada, el núcleo es el conjunto de soluciones de $A\vec{x}=\vec{0}$ y una base se obtiene por eliminación de Gauss. Una forma de aplicarla es

$$\begin{pmatrix} -i & 2-i & 1 \\ 1-i & 3+i & 1+i \\ 0 & 0 & 2+3i \end{pmatrix} \underset{f_1\mapsto i f_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1+2i & i \\ 1-i & 3+i & 1+i \\ 0 & 0 & 2+3i \end{pmatrix} \underset{f_2\mapsto f_2+(i-1)f_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1+2i & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+3i \end{pmatrix}$$

e intercambiando la segunda y la tercera filas se obtiene la forma escalonada. La única columna no pivote es la segunda, así pues debemos tomar $x_2=\lambda$. De $(2+3i)x_3=0$ se sigue $x_3=0$. Sustituyendo en la ecuación correspondiente a la primera fila $x_1+(1+2i)\lambda+0=0$. En definitiva, todas las soluciones son

$$\vec{x}=\lambda\vec{v}_1 \qquad \text{con} \quad \vec{v}_1=\begin{pmatrix} -1-2i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y una base del núcleo es} \quad \mathcal{B}_{\text{Ker}}=\{\vec{v}_1\}.$$

Según la teoría, una base de la imagen se obtiene con las columnas pivote de A. Ya habíamos visto que los pivotes aparecen en las columnas primera y tercera, por tanto, una base válida es

$$\mathcal{B}_{\text{Im}}=\{\vec{w}_1,\,\vec{w}_2\} \qquad \text{con} \quad \vec{w}_1=\begin{pmatrix} -i \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{w}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \\ 2+3i \end{pmatrix}.$$

---

2) [2 puntos] En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual consideramos el vector $\vec{v}$ y el subespacio vectorial W dados por

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad W = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - 8x_3 - x_4 & = & 0, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 & = & 0, \\ -3x_1 + x_2 + 7x_3 + 9x_4 & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Calcula $\|\vec{w} - (1,0,3,3)^t\|$ donde $\vec{w}$ es la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre W.

En primer lugar calculamos una base de W aplicando eliminación de Gauss a las ecuaciones que definen el subespacio. Para que los cálculos sean más simples, intercambiamos la primera y la segunda ecuación:

$$\xrightarrow[f_1 \leftrightarrow f_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -8 & -1 \\ -3 & 1 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{f_2 \mapsto f_2 - 2f_1 \\ f_3 \mapsto f_3 + 3f_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -8 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3 \mapsto f_3 + 4f_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las columnas no pivote son las dos últimas, por tanto asignamos $x_3 = \lambda$ y $x_4 = \mu$. La segunda fila conduce a $x_2 = 2\lambda - 3\mu$ y, sustituyendo en la ecuación correspondiente a la primera fila, $x_1 + (2\lambda - 3\mu) - 5\lambda + \mu = 0$, de donde $x_1 = 3\lambda + 2\mu$. En definitiva, el conjunto de soluciones está formado por los vectores de la forma

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3\lambda + 2\mu \\ 2\lambda - 3\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 \quad \text{con} \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es una base de W. Un cálculo muestra $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$, esto es, $\mathcal{B}$ es base ortogonal y podemos aplicar el primer método visto en la teoría para concluir que

$$\vec{w} = P_W(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2} \vec{v}_2 = \frac{18 - 2 - 2}{9 + 4 + 1} \vec{v}_1 + \frac{12 + 3 - 1}{4 + 9 + 1} \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así pues, la longitud pedida es

$$\left\| \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{16 + 1 + 4 + 4} = \sqrt{25} = 5.$$

---

3) [2 puntos] Escribe una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de la siguiente matriz y comprueba que es base ortogonal:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Desarrollando por la primera columna,

$$|A - \lambda I| = (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1-\lambda & -2 \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 4) + (-4 + 4\lambda)$$
$$= (-\lambda^2 + \lambda + 4 - \lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda) + (-4 + 4\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda = -\lambda(\lambda+3)(\lambda-3).$$

Por consiguiente, los autovalores son $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -3$. Como cada uno tiene multiplicidad 1, la teoría asegura $\operatorname{rg}(A - \lambda_j I) = 2$ y cada sistema $(A - \lambda_j I)\vec{x} = \vec{0}$ da lugar a un autovector $\vec{v}_j$ y sus múltiplos no nulos. Para resolver estos sistemas nos podemos quedar con las dos primeras filas (porque no son proporcionales y la tercera debe ser combinación lineal de ellas). Se sigue que los $\vec{v}_j$, $j = 1, 2, 3$, son soluciones de los sistemas que tienen por matrices, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Las tres son escalonadas con la tercera columna no pivote, por tanto, podemos tomar x_3 arbitrario y despejar x_2 y x_1. Para que salgan números enteros y pequeños (no es obligatorio), elegimos $x_3 = 1$ en el segundo caso y $x_3 = 2$ en los otros dos. De esta forma resulta

$$\begin{matrix} x_3 = 2 \\ \Downarrow \\ x_2 = -2 \\ x_1 = 1 \end{matrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} x_3 = 1 \\ \Downarrow \\ x_2 = 2 \\ x_1 = 2 \end{matrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} x_3 = 2 \\ \Downarrow \\ x_2 = 1 \\ x_1 = -2 \end{matrix} \Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Unos cálculos sencillos muestran que $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0$, por tanto son ortogonales.

Los vectores ortogonales no nulos son linealmente independientes (la implicación contraria no es cierta en general) y entonces $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ (lo cual corrobora en este ejemplo el teorema espectral porque la matriz de partida es simétrica).

---

4) [$2 = 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5$ puntos] Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Cada error penaliza $-0{,}25$ y dejarlo en blanco no descuenta.

- V. ■ F. □ Si λ es autovalor de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ con $A^2 = -I$ entonces $\lambda = i$ o $\lambda = -i$.

  [$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ con $\vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow A^2\vec{v} = \lambda A\vec{v} \Rightarrow -\vec{v} = \lambda^2\vec{v} \Rightarrow \lambda^2 = -1$.]
- V. ■ F. □ Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es invertible $A\vec{x} = \vec{0}$ tiene solución única.

  [Multiplicando por A^{-1} se sigue $\vec{x} = A^{-1}\vec{0} = \vec{0}$.]
- V. ■ F. □ Para $A, B \in \mathcal{M}_n$ cualesquiera se cumple $|A + AB| = |BA + A|$.

  [Porque $|A + AB| = |A||I + B| = |I + B||A| = |A + BA| = |BA + A|$.]
- V. ■ F. □ Para $A, B \in \mathcal{M}_n$ cualesquiera se cumple $|A^t + AB^t| = |A + BA^t|$.

  [Porque $|A^t + AB^t| = |(A^t + AB^t)^t| = |(A^t)^t + (AB^t)^t| = |A + (B^t)^t A^t| = |A + BA^t|$.]

5) [$2 = 1 + 1$ puntos] Para cada una de estas afirmaciones escribe una justificación si es cierta o un contraejemplo si es falsa. No hay penalización por error.

- V. □ F. ■ Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cumple $A^2 = I$ entonces A es diagonal.

Contraejemplo: Un contraejemplo sencillo es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ que cumple $A^2 = I$ y no es diagonal.

- V. ■ F. □ Si $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ entonces $AB - BA \neq 2026I$.

Justificación: Sea $C = AB - BA$. Operando los productos (para el segundo basta intercambiar A y B) se tiene que los elementos de la diagonal son

$$c_{11} = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) - (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21}) \quad \text{y} \quad c_{22} = (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22}),$$

por tanto, su suma es $c_{11} + c_{22} = 0$, mientras que la suma de los elementos de la diagonal de $2026I$ es 4052.

Criterios de corrección y comentarios

En Moodle hay comentarios personalizados explicando los errores. Indico aquí las puntuaciones genéricas. Hay ligeras variaciones en la práctica porque valoro el aspecto general y la coherencia interna de cada ejercicio.

Ejercicio 1.

• La eliminación de Gauss, la base del núcleo y la base de la imagen puntúan, respectivamente 0,75, 0,75 y 0,5.

• Un error leve de cálculo descuenta 0,5. Si se ha producido al comienzo en la eliminación de Gauss, no se vuelve a penalizar siempre que las bases obtenidas sean coherentes con el error.

Ejercicio 2.

• Los cálculos de una base de W, de la proyección ortogonal y de la norma indicada puntúan, respectivamente 0,75, 1,0 y 0,25.

• En consonancia con lo anterior, utilizar una fórmula errónea para la proyección ortogonal descuenta, en general, 1.

• Cada error de cálculo descuenta 0,5. De nuevo, se tiene en consideración que los cálculos subsiguientes sean coherentes con el error.

Ejercicio 3.

• Los cálculos del polinomio característico, los autovectores y la comprobación de la ortogonalidad puntúan, respectivamente 0,75, 1,0 y 0,25.

• La ortogonalidad de vectores no nulos implica la independencia lineal, pero los vectores linealmente independientes no son siempre ortogonales. Este es un error grave. De todas formas, con el baremo anterior descuenta 0,25.

Ejercicio 4.

• (a), (b), (c), (d). Una posible calificación total negativa no afecta al resto de los ejercicios. Por ejemplo, con cuatro errores se asigna al ejercicio la puntuación 0 en el cómputo global.

Ejercicio 5.

• (a), (b). No cuenta nada marcar la casilla correcta sin dar un contraejemplo adecuado en (a) o una justificación válida en (b).