Apellidos y nombre: ....

.... DNI (o pasaporte): ....

1) [2 puntos] Halla una base del núcleo y otra de la imagen del endomorfismo

$$f : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3 \qquad \text{dado por} \qquad f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -i & 2-i & 1 \\ 1-i & 3+i & 1+i \\ 0 & 0 & 2+3i \end{pmatrix} \vec{x} \quad \text{donde} \quad i^2 = -1.$$

2) [2 puntos] En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual consideramos el vector $\vec{v}$ y el subespacio vectorial W dados por

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad W = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - 8x_3 - x_4 & = & 0, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 & = & 0, \\ -3x_1 + x_2 + 7x_3 + 9x_4 & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Calcula $\|\vec{w} - (1,0,3,3)^t\|$ donde $\vec{w}$ es la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre W.

3) [2 puntos] Escribe una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de la siguiente matriz y comprueba que es base ortogonal:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

4) [$2 = 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5$ puntos] Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Cada error penaliza $-0{,}25$ y dejarlo en blanco no descuenta.

- V. ☐ F. ☐ Si λ es autovalor de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ con $A^2 = -I$ entonces $\lambda = i$ o $\lambda = -i$.
- V. ☐ F. ☐ Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es invertible $A\vec{x} = \vec{0}$ tiene solución única.
- V. ☐ F. ☐ Para $A, B \in \mathcal{M}_n$ cualesquiera se cumple $|A + AB| = |BA + A|$.
- V. ☐ F. ☐ Para $A, B \in \mathcal{M}_n$ cualesquiera se cumple $|A^t + AB^t| = |A + BA^t|$.

5) [$2 = 1 + 1$ puntos] Para cada una de estas afirmaciones escribe una justificación si es cierta o un contraejemplo si es falsa. No hay penalización por error.

- V. ☐ F. ☐ Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cumple $A^2 = I$ entonces A es diagonal.

Justificación/contraejemplo:

- V. ☐ F. ☐ Si $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ entonces $AB - BA \neq 2026I$.

Justificación/contraejemplo: