
Plazo y modo de entrega: Hasta las 23:59 del 15 de diciembre. Se debe subir a Moodle un solo fichero PDF llamado **extra.pdf** de a lo más 6MB y dos páginas. Usa, por ejemplo, la aplicación gratuita *online* <https://www.ilovepdf.com/> si tienes problemas con el formato.

Enunciado. Consideremos los polinomios P_0, P_1, P_2, P_3 , etc. determinados por $P_0 = 1$, $P_1 = 2x - 1$ y $P_n = 2P_1P_{n-1} - P_{n-2}$ para $n > 1$.

(a) Prueba que $\{P_0, P_1, \dots, P_{2n}\}$ es una base de $\{P \in \mathbb{R}_{2n}[x] : P(x) = P(1-x)\}$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$.

(b) Cuando se pedía evaluar $\cos(\pi t)$ con $t \in [0, 1]$ a uno de los primeros microordenadores, realmente devolvía

$$c_0(2t-1)P_0(t) + c_2(2t-1)P_2(t) + c_4(2t-1)P_4(t)$$

con c_0, c_2, c_4 las siguientes constantes que tenía almacenadas en la memoria:

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(\pi x) dx}{(2x-1)\sqrt{x-x^2}} \approx -1,27628, \quad c_2 = \frac{16}{\pi} \int_0^1 \frac{(x^2-x+\frac{1}{8}) \cos(\pi x) dx}{(2x-1)\sqrt{x-x^2}} \approx 0,285262,$$
$$c_4 = \frac{256}{\pi} \int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{128} \right) \frac{\cos(\pi x) dx}{(2x-1)\sqrt{x-x^2}} \approx -0,00911802.$$

Interpreta esta aproximación (que daba unos cuantos decimales correctos) en términos de una proyección ortogonal, indicando claramente los espacios vectoriales y el producto escalar involucrados, el vector que se proyecta y, con ello, explica las fórmulas integrales para las constantes.

Instrucciones:

- Se permite colaborar, pero las redacciones de la solución deben ser individuales y distintas. Se penalizarán las copias literales. Además, se te puede requerir que expliques la solución si hay indicios de que no entiendes lo que has escrito.
- No daré a título particular ninguna pista adicional. Solo responderé acerca de aclaraciones sobre el enunciado y las instrucciones.
- Una solución correcta completa incrementa en un punto la calificación global (sobre 10) de la evaluación continua. El problema tiene una orientación teórica. Para conseguir toda la calificación se esperan razonamientos matemáticamente rigurosos.
- Si por alguna razón necesitas software *online* gratuito para calcular integrales, uno de los sitios más famosos es WolframAlpha en <https://www.wolframalpha.com/>. Por ejemplo, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ puede calcularse allí con `integrate 1/sqrt(x-x^2) dx from x=0 to 1`.