Relaciones de equivalencia

Ingeniería informática Curso: Álgebra

Fernando Chamizo https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/

Comentarios

Continuamos con la definición de objetos algebraicos introduciendo las relaciones, que son una especie de generalización de las funciones de un conjunto en sí mismo, y centrándonos en las de equivalencia. A pesar de que seguimos en el terreno de las definiciones, el concepto asociado de conjunto cociente es esquivo porque requiere pensar en términos de conjuntos de conjuntos y, a menudo, darles una interpretación más simple.

1. Relaciones y sus propiedades

Intuitivamente, una relación en un conjunto es una manera de comparar unos elementos con otros. Los elementos a comparar conforman un par ordenado y esto motiva la siguiente definición matemática: Una *relación* en un conjunto A es un subconjunto, $\mathcal{R}$, de $A \times A$. Si $a, b \in A$ cumplen $(a, b) \in \mathcal{R}$, se dice que *a está relacionado con b* y se suele escribir $a\mathcal{R}b$. Por otro lado, indicaremos que a y b no están relacionados con $a\not\mathcal{R}b$. Una función $f : A \longrightarrow A$ define la relación $\mathcal{R} = \{(a, f(a)) : a \in A\}$, sin embargo, una relación va más allá, es como si pudiéramos asignar a cada elemento varias imágenes.

La definición de relación es demasiado general, es un simple subconjunto. Fijémonos en algunas propiedades adicionales.

Diremos que una relación, $\mathcal{R}$, definida en un conjunto, A, es:

- *Reflexiva*, si $\forall a \in A \ a\mathcal{R}a$.
- *Simétrica*, si $\forall a, b \in A \ a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$.
- *Transitiva*, si $\forall a, b, c \in A \ \ a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$.
- *Antisimétrica*, si $\forall a, b \in A \ a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a \Rightarrow a = b$.

Las relaciones que nos van a interesar en este curso son las que tienen las tres primeras propiedades. Antes de definirlas, veamos algunos ejemplos.

Ejemplo. Si en $\mathbb{N}$ definimos $n\mathcal{R}m$ pidiendo que n y m coincidan en su dígito más a la derecha (por ejemplo, $17\mathcal{R}37$, $17\not\mathcal{R}25$ y $10\mathcal{R}0$), entonces $\mathcal{R}$ tiene las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplo. En $\mathbb{Z}$ la relación $n\mathcal{R}m \Leftrightarrow 2n \neq 3m$ no es reflexiva (porque $0\not\mathcal{R}0$) ni simétrica ($2\mathcal{R}3$ y $3\not\mathcal{R}2$), ni antisimétrica ($1\mathcal{R}5$, $5\mathcal{R}1$ y $1 \neq 5$), ni transitiva ($3\mathcal{R}1$, $1\mathcal{R}2$, pero $3\not\mathcal{R}2$).

Ejemplo. En $\mathbb{N}$ la relación $n\mathcal{R}m \Leftrightarrow n$ divide a m es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Ejemplo. Dado un conjunto U en $\mathcal{P}(U)$ definimos la relación $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B$. Es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Una *relación de equivalencia* es una relación reflexiva, simétrica y transitiva. El nombre transmite la idea de que es una relación que permite hacer agrupaciones de los elementos del conjunto de igual a igual, sin ninguna subordinación entre ellos. Esto quedará más claro en el siguiente apartado. El primero de los ejemplos anteriores es, por tanto, una relación de equivalencia, igual que todo lo que definamos en términos de igualdades de funciones. Veamos un par de ejemplos aritméticos más.

Ejemplo. Comprobar que en $\mathbb{Z}$ es de equivalencia la relación $n\mathcal{R}m \Leftrightarrow n-m$ es múltiplo de tres.

La reflexiva se reduce a $0 = 3 \cdot 0$, la simétrica a que $n - m = 3k$ implica $m - n = 3 \cdot (-k)$. Finalmente si $n\mathcal{R}m$ y $m\mathcal{R}l$ entonces $n - m = 3k_1$ y $m - l = 3k_2$. Sumando, $n - l = 3(k_1 + k_2)$, por tanto, $n\mathcal{R}l$ y se concluye la transitiva.

Ejemplo. Comprobar que en $\mathbb{Z}^+$ la relación $n\mathcal{R}m \Leftrightarrow nm$ es un cuadrado perfecto es de equivalencia.

Se tiene $n\mathcal{R}n$ porque n^2 es un cuadrado, lo que muestra la reflexiva. La simétrica se sigue de la conmutativa de la multiplicación. Para la transitiva, notemos que $n\mathcal{R}m$ y $m\mathcal{R}l$ dan $nm = a^2$ y $ml = b^2$ con $a, b \in \mathbb{Z}^+$, lo que implica, multiplicando y despejando, $nl = (ab/m)^2$. Así pues nl es el cuadrado de una fracción. Esta fracción debe ser un entero porque nl lo es. Así pues, $n\mathcal{R}l$.

Ya hemos visto varios ejemplos que no satisfacen las propiedades. Veamos otro más, esta vez sobre $\mathbb{R}$.

Ejemplo. Comprobar que en $\mathbb{R}$ la relación $x\mathcal{R}x \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$ no es de equivalencia.

Es fácil ver que la reflexiva y la transitiva se cumplen. La que falla es la simétrica. Por ejemplo $2\mathcal{R}3$, pero $3\not\mathcal{R}2$. Por otro lado, sí se cumple la antisimétrica.

Comentario. Las relaciones como la anterior y las de otros ejemplos que son reflexivas, antisimétricas y transitivas indican cierta subordinación entre los elementos del conjunto y se llaman *relaciones de orden*. A pesar de que han desaparecido del temario, tienen cierta conexión con la informática. Por ejemplo, los árboles, que aparecen en algunas asignaturas del grado, se pueden considerar asociadas a una relación de orden de modo que los elementos más próximos a la raíces “ganan” a los que están en las ramas que parten de ellos.

2. Clases de equivalencia y conjunto cociente

Como ya hemos indicado, las relaciones de equivalencia permiten agrupar los elementos de un conjunto en familias de elementos similares. Las definiciones matemáticas que capturan este concepto para una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en un conjunto A son las siguientes:

Para cada $a \in A$ se llama *clase de equivalencia* de a al subconjunto $\overline{a} = \{x \in A : x\mathcal{R}a\}$. Otra notación habitual es $[a]$ en lugar de $\overline{a}$. Al conjunto de clases de equivalencia se le llama *conjunto cociente* y se suele denotar mediante $A/\mathcal{R}$.

Por la reflexiva, cada elemento de A es un elemento de su propia clase, con símbolos, $a \in \overline{a}$. Es fácil ver (más adelante se explica con detalle) que las clases de dos elementos coinciden si y solo si ambos están relacionados, $\overline{a} = \overline{b} \iff a\mathcal{R}b$. Una propiedad muy similar es que afirmar que las clases de dos elementos no coinciden equivale a afirmar que sean disjuntas (ejercicio).

Antes de avanzar más, veamos un ejemplo sencillo.

Ejemplo. En $\mathbb{Z}$ se considera la relación de equivalencia $n\mathcal{R}m \iff 2 \mid n - m$ (en palabras, que n y m tienen la misma paridad). Hallar las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

Es obvio que $\overline{0}$ son los pares y que cada número par está relacionado con 0, así que de la propiedad $\overline{a} = \overline{b} \iff a\mathcal{R}b$ se sigue

$$\overline{0} = \overline{2} = \overline{-2} = \overline{4} = \overline{-4} = \overline{6} = \overline{-6} = \overline{8} = \overline{-8} = \cdots = \{\text{enteros pares}\}.$$

De la misma forma, $\overline{1}$ son los impares (porque $n-1$ es divisible por 2 si y solo si n es impar) y

$$\overline{1} = \overline{-1} = \overline{3} = \overline{-3} = \overline{5} = \overline{-5} = \overline{7} = \overline{-7} = \cdots = \{\text{enteros impares}\}.$$

En conclusión, una descripción explícita del conjunto cociente $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$ es $Z/\mathcal{R} = \{\overline{0}, \overline{1}\}$. Obviamente, por las igualdades anteriores podríamos ser originales y escribir $Z/\mathcal{R} = \{\overline{2025}, \overline{2026}\}$. Sería exactamente lo mismo porque $\overline{2025} = \overline{1}$ y $\overline{2026} = \overline{0}$.

En el ejemplo anterior, $\mathbb{Z} = \overline{0} \cup \overline{1}$ con $\overline{0} \cap \overline{1} = \varnothing$, hemos descompuesto los enteros en dos conjuntos asociados a las clases, los pares y los impares, que son disjuntos, no tienen nada en común. Esto no es una casualidad y motiva introducir ahora un concepto relativo a conjuntos.

Dado un conjunto A se dice que una colección de subconjuntos no vacíos $\{A_\alpha\}$ es una *partición* de A si se cumple

$$A = \bigcup_\alpha A_\alpha \qquad \text{y} \qquad A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing \quad \text{para } \alpha \neq \beta.$$

Por lo dicho antes, las clases de equivalencia correspondientes a elementos no relacionados son disjuntas y no vacías, por consiguiente, definen una partición de A. Con símbolos,

$$A = \bigcup_{c \in A/\mathcal{R}} c \qquad \text{y} \qquad c_1 \cap c_2 = \varnothing \quad \text{para } c_1, c_2 \in A/\mathcal{R} \text{ con } c_1 \neq c_2.$$

Veamos la situación en un ejemplo finito con números naturales.

Ejemplo. En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 9\}$ la relación $n\mathcal{R}m \Leftrightarrow 3$ divide a $n - m$, es de equivalencia. Calcular las clases de equivalencia comprobando que da una partición.

Examinando el conjunto y usando las propiedades, se obtiene rápidamente

$$\overline{1} = \{1\}, \qquad \overline{2} = \overline{5} = \{2, 5\}, \qquad \overline{3} = \overline{6} = \overline{9} = \{3, 6, 9\}.$$

Entonces solo hay tres clases de equivalencia distintas y el conjunto cociente es

$$A/\mathcal{R} = \big\{\{1\}, \{2, 5\}, \{3, 6, 9\}\big\} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}.$$

Las clases conforman una partición de A, esto es, A coincide con la unión $\{1\} \cup \{2, 5\} \cup \{3, 6, 9\}$ donde los tres subconjuntos de esta unión son disjuntos dos a dos y no vacíos.

Lo mismo aviva la atención una variante de nuestro primer ejemplo con cierto sabor a informática añeja.

Ejemplo. Consideramos el conjunto B_N de todas las listas ordenadas de N bits. Para $\ell \in B$ definimos $f(\ell) = 1$ si ℓ tiene un número impar de unos y $f(\ell) = 0$ si tiene un número impar. Hallar $B_N/\mathcal{R}$ para la relación de equivalencia $\ell_1\mathcal{R}\ell_2 \iff f(\ell_1) = f(\ell_2)$.

Solo hay dos posibilidades, que el número de unos sea par o que sea impar, entonces solo habrá dos clases de equivalencia . Una posible descripción explícita del conjunto cociente es:

$$B_N/\mathcal{R} = \big\{\overline{000 \cdots\cdots 00}, \overline{000 \cdots\cdots 01}\big\}.$$

Está claro que las clases dan lugar a una partición.

Comentario. Con la notación de este ejemplo, si dado un elemento de B_{N-1} añadimos un bit más (llamado *bit de paridad*) para forzar a que el elemento resultante de B_N esté en la primera clase, esto es, que tenga un número par de unos, entonces cada vez que detectemos un elemento en la segunda clase sabremos que ha habido un error al manipularlo. Este es un método muy burdo, pero sencillo que permite detectar la mitad de los casos en que hay errores. Métodos mucho más sofisticados relacionados con la parte final del curso, permiten no solo detectar errores sino localizarlos con cierta fiabilidad y repararlos sobre la marcha.

La aplicación $f : A \longrightarrow A/\mathcal{R}$ que asigna a cada elemento su clase es sobreyectiva, pero no inyectiva en general (solo lo sería si las clases estuvieran formadas por un elemento), por tanto, el conjunto cociente alberga menos información que el conjunto original. Agrega los individuos particulares en familias con propiedades similares. Al tener $A/\mathcal{R}$ una definición abstracta, muchas veces es conveniente buscar una biyección con un conjunto más sencillo de entender.

Antes de ver ejemplos matemáticos, pensemos en uno con palabras. Si entre todos los españoles mayores de edad consideramos la relación de equivalencia dada por tener la misma letra en el DNI, el conjunto cociente es el que tiene como elementos los conjuntos de españoles con la misma letra en el DNI. En vez de pensar en este conjunto de conjuntos es más fácil identificar cada clase la letra que le corresponde. En términos matemáticos, lo que tenemos es una biyección $A/\mathcal{R} \longrightarrow \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \dots, \mathtt{Z}\}$.

Ejemplo. En $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ consideramos la relación de equivalencia $(x_1, y_1)\mathcal{R}(x_2, y_2) \iff x_1 + y_1 = x_2 + y_2$. Hallar el conjunto cociente y encontrar una biyección con un conjunto sencillo.

Cada clase de equivalencia está determinada de forma unívoca por el valor de la suma. Por tanto, $\mathbb{R}^2/\mathcal{R} = \{\overline{(t,0)} : t \in \mathbb{R}\}$. Con más detalle, cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ está relacionado con $(x+y, 0)$, de modo que está en una clase $\overline{(t,0)}$. Por otro lado, $\overline{(t_1,0)} \neq \overline{(t_2,0)}$ si $t_1 \neq t_2$ porque en este caso $(t_1, 0)\not\mathcal{R}(t_2, 0)$.En definitiva, $\{\overline{(t,0)} : t \in \mathbb{R}\}$ es una descripción lícita del conjunto cociente en la que no estamos repitiendo ningún elemento y la biyección natural $\overline{(t,0)} \mapsto t$ permite identificar $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$ con $\mathbb{R}$.

Ejemplo. En $\mathbb{R}$ consideramos la relación de equivalencia $x\mathcal{R}y \iff \operatorname{sen}(2\pi x) = \operatorname{sen}(2\pi y)$ y $\cos(2\pi x) = \cos(2\pi y)$, donde los ángulos se consideran en radianes. Hallar el conjunto cociente y encontrar una biyección con un conjunto sencillo.

Jugando un poco con las gráficas del seno o el coseno o con su definición geométrica, se concluye (ejercicio) que la relación es equivalente a decir que x e y difieren en un entero. En otras palabras, $\overline{x} = \{x + n : n \in \mathbb{Z}\}$. A base de sumar un número adecuado, se pasa cualquier $x \in \mathbb{R}$ a $[0, 1)$. Esto es lo mismo que asignar a x su parte fraccionaria, $\operatorname{Frac}(x)$, en caso de que conozcas esta función. Está claro que dos elementos distintos de $[0, 1)$ no pueden estar relacionados (geométricamente es como decir que dos ángulos distintos en $[0, 2\pi)$ dan puntos distintos de la circunferencia unidad, donde se pintan seno y coseno). En definitiva, $\mathbb{R}/\mathcal{R} = \{\overline{t} : t \in [0, 1)\}$ y se tiene una biyección natural $f : \mathbb{R}/\mathcal{R} \longrightarrow [0, 1)$.

Para terminar, practiquemos con el rigor matemático y la lógica probando una de las propiedades de las clases de equivalencia.

Ejemplo (Teórico). Demostrar que verdaderamente en una relación de equivalencia se cumple la doble implicación $\overline{a} = \overline{b} \iff a\mathcal{R}b$.

Para probar la implicación directa $\Longrightarrow$ recordemos $a \in \overline{a}$. Como partimos de $\overline{a} = \overline{b}$, se tiene $a \in \overline{b}$ y la definición de esta última clase implica $a\mathcal{R}b$. Para la implicación contraria la hipótesis es $a\mathcal{R}b$ y queremos concluir $\overline{a} = \overline{b}$. Si $x \in \overline{a}$, por definición, $x\mathcal{R}a$ y la transitiva implica $x\mathcal{R}b$, por lo que $x \in \overline{b}$. Con esto hemos probado que $\overline{a} \subset \overline{b}$. Por la propiedad simétrica podemos intercambiar los nombres de a y b y razonando del mismo modo se sigue $\overline{b} \subset \overline{a}$. Por doble inclusión, $\overline{a} = \overline{b}$.