

# Conjuntos y funciones

Ingeniería informática      Curso: Álgebra

Fernando Chamizo      <https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/>

## Comentarios

Los conjuntos y las funciones entre ellos son conceptos muy básicos en matemáticas. No habrá grandes resultados en este tema, más que nada constará de un puñado de definiciones. Sin embargo, no se reduce a un ejercicio memorístico pues algunas de las definiciones requieren cierta comprensión abstracta para su aplicación en los ejemplos.

## 1. La notación básica

En Francia surgió en cierto punto del siglo XX un movimiento, que se extendió por otros países, en favor de que las matemáticas y su enseñanza estuvieran basadas en la noción de *conjunto*. Aunque esta opinión ha perdido fuerza en lo relativo a la educación, cualquier libro básico de matemáticas hace referencia a los conjuntos sin llegar a definirlos. Tampoco los definiremos aquí (no es nada sencillo) y nos limitaremos a la idea vaga de que un conjunto es una colección de cosas que decimos que son sus *elementos*.

Para indicar un conjunto exhibiendo sus elementos, los encerramos entre llaves separamos con comas. Así  $A = \{1, 2, 7\}$  quiere decir el conjunto formado por los elementos 1, 2 y 7. Esta manera de describir un conjunto por sus elementos se dice que es *explícita* (o por *extensión*). Para indicar que algo es elemento de un conjunto, se usan “ $\in$ ”, que se lee *pertenece*. A veces se especifican los elementos por una propiedad y para ello es útil el símbolo “:” con el significado de *tal que* (también es común emplear “|” con este significado). Se dice, en este caso, que el conjunto se ha descrito de forma *implícita* (o por *comprensión*). Un par de conjuntos definidos explícita e implícitamente destacando uno de sus elementos son:

$$\clubsuit \in \{0, 1, \clubsuit, \heartsuit\}, \quad 103 \in \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es número primo}\}.$$

Aquí  $\mathbb{N}$  es el conjunto de los números naturales. Es importante subrayar que lo que caracteriza a los conjuntos son sus elementos, no el orden en que los presentemos en su descripción explícita. Así pues,  $\{1, 2, 7\} = \{7, 2, 1\}$ . Como intenta sugerir  $\{0, 1, \clubsuit, \heartsuit\}$ , los elementos de un conjunto no son necesariamente números. De hecho, más adelante tendrán cierta relevancia los conjuntos de conjuntos, como  $\{\{0\}, \{1\}, \{1, 2\}\}$ .

**Ejemplo.** Para el conjunto  $C = \{n \in \mathbb{N} : n^2 - 1 \text{ múltiplo de } 4 \text{ y } n < 20\}$  hallar su descripción explícita.

Por un ejemplo anterior sabemos que para  $n$  impar siempre  $n^2 - 1$  es múltiplo de 4 y, obviamente, para  $n$  par no lo es. Por tanto, el conjunto  $C$  es  $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$ .

No siempre es fácil deducir los elementos, esto es, la forma explícita a partir de la implícita. En rigor, para conjuntos con infinitos elementos, no podemos enumerar “de verdad” todos ellos, aunque, ocasionalmente, podemos recurrir a artificios como puntos suspensivos. Por ejemplo,  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ . Para un conjunto  $A$  finito, es decir, con un número finito de elementos, decimos que este número es su *cardinal* y se denota mediante  $|A|$  o  $\#A$ . Cuando escribamos  $|A| = \infty$  querremos decir que no tiene un número finito de elementos.

**Ejemplo.** Hallar el cardinal de  $A = \{x \in \mathbb{R} : x^4 - x^2 - 2 = 0\}$ .

Se tiene la factorización  $x^4 - x^2 - 2 = (x^2 - 2)(x^2 + 1)$ , por tanto la descripción explícita de  $A$  es  $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$  y  $|A| = 2$ .

Con  $A \subset B$  se indica que  $A$  está incluido en  $B$  (se admite también que sean iguales) y con  $A \supset B$  que  $A$  incluye a  $B$ , es decir,  $B \subset A$ . De este modo,

$$\{\text{seres humanos}\} \subset \{\text{vertebrados}\}, \quad \{\text{bípedos sin plumas}\} \supset \{\text{seres humanos}\}.$$

Según la leyenda, Platón afirmó la igualdad entre los dos últimos conjuntos. Para practicar con la notación lógica:

$$A \subset B \quad \text{equivale a} \quad x \in A \implies x \in B.$$

Si  $A \subset B$  se dice que  $A$  es un *subconjunto* de  $B$ . Es fácil ver que  $A = B \iff A \subset B \wedge A \supset B$ . De hecho, este es un método habitual de probar la igualdad de dos conjuntos, llamado *doble inclusión*.

Por razones que veremos enseguida es conveniente introducir un conjunto especial, que se sale fuera de nuestra definición intuitiva. Es el *conjunto vacío* que no tiene elementos. Un símbolo habitual es  $\emptyset$ . Se considera que es subconjunto de cualquier conjunto. Por razones obvias, se le asigna el cardinal cero.

**Ejemplo.** Observando la traducción lógica de la inclusión, explicar que  $\emptyset \subset A$  para cualquier conjunto.

Hay que comprobar que  $x \in \emptyset \implies x \in A$  es cierto. Si recordamos la tabla de verdad de  $\implies$  veremos que como  $x \in \emptyset$  falla (porque  $\emptyset$  no tiene elementos) la implicación es cierta.

Al conjunto formado por todos los subconjuntos de  $A$  se le llama *conjunto potencia* o *conjunto de partes* de  $A$  y se denota con  $\mathcal{P}(A)$ . Según lo dicho anteriormente, no hay que olvidar incluir el vacío.

**Ejemplo.** Hallar el conjunto de partes de  $A = \{1, 2, 3\}$ .

Los subconjuntos de cardinal 1 son  $\{1\}$ ,  $\{2\}$  y  $\{3\}$ , mientras que los de cardinal dos son  $\{2, 3\}$ ,  $\{1, 3\}$  y  $\{1, 2\}$ . A estos hay que añadir el vacío, de cardinal cero, y el total, de cardinal tres. En definitiva:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Recordando un poco la combinatoria, no es difícil probar que los conjuntos finitos cumplen

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}.$$

En el ejemplo anterior,  $|A| = 3$  y  $|\mathcal{P}(A)| = 8$ .

**Comentario.** Si quieres practicar con el método de inducción que habrás aprendido en la asignatura de análisis, puedes demostrar esta fórmula por inducción en el cardinal notando que al añadir un elemento tienes todos los subconjuntos de antes y otros nuevos consistentes en añadir a cada uno de ellos este elemento, con lo cual en cada paso el cardinal se duplica.

Es importante tener clara la diferencia entre elemento y subconjunto, sobre todo en conjuntos de conjuntos, como el conjunto potencia. Los subconjuntos se obtienen eliminando algunos elementos (o todos o ninguno) del conjunto de partida. Por otro lado, en la descripción explícita los elementos son fáciles de reconocer porque aparecen inmediatamente dentro de las llaves exteriores separados por comas. Así, para  $A = \{0, 1, \{1, 2\}\}$  se tiene  $\{1, 2\} \in A$  (es un elemento), mientras que  $\{\{1, 2\}\} \subset A$  (es un subconjunto obtenido al eliminar de  $A$  los elementos 0 y 1). También  $1 \in A$  y  $\{1, \{1, 2\}\} \subset A$ . Para complicar las cosas, en algunos ejemplos enrevesados los conceptos de elemento y subconjunto no son excluyentes.

**Ejemplo.** Encontrar un conjunto  $A$  tal que uno de sus elementos sea también un subconjunto.

Tomemos  $A = \{0, 1, \{0, 1\}, \{2\}\}$ , entonces  $\{0, 1\} \in A$  porque aparece en la lista de elementos y además  $\{0, 1\} \subset A$  porque es lo que se obtiene al eliminar los elementos  $\{0, 1\}$  y  $\{2\}$  de dicha lista. Solo para aclarar la situación, 2 no es elemento de  $A$ ,  $\{2\}$  es elemento y no subconjunto y  $\{\{2\}\}$  es subconjunto y no elemento.

**Ejemplo.** Decidir si es cierto  $\forall A \emptyset \in \mathcal{P}(A) \wedge \emptyset \subset \mathcal{P}(A)$ .

El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto, por tanto,  $\emptyset \subset A \wedge \emptyset \subset \mathcal{P}(A)$ . Por definición,  $\mathcal{P}(A)$  tiene como elementos a todos los subconjuntos de  $A$ , así pues  $\emptyset \subset A \implies \emptyset \in \mathcal{P}(A)$  y se concluye que la afirmación es verdadera.

## 2. Operaciones con conjuntos

Las operaciones más básicas entre dos conjuntos  $A$  y  $B$  son la *intersección* y la *unión*, definidas como

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\} \quad \text{y} \quad A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

En la segunda fórmula, como en la lógica proposicional, el “o” no es exclusivo, puede estar en ambos conjuntos. La intersección es la que motiva introducir el conjunto vacío para que  $A \cap B$  dé siempre un conjunto. Por ejemplo,  $\{13, 7, \spadesuit\} \cap \{\sqrt{2}, \pi\} = \emptyset$ .

Otra operación natural con dos conjuntos  $A$  y  $B$  es su *diferencia*, a veces llamada *resta*, que se denota con  $A \setminus B$  o  $A - B$  y se define como

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

No es cierto en general  $(A \setminus B) \cup B = A$ , como parece sugerir el nombre y la notación.

**Ejemplo.** Dados  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 3\}$  y  $C = \{3, 4, 5\}$ . Hallar  $A - B$ ,  $A - C$  y  $(A \setminus C) \cup C$ .

Usando la definición,  $A \setminus B = \{1\}$ ,  $A \setminus C = \{1, 2\}$  y, por tanto,  $(A \setminus C) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Hay también una operación llamada *diferencia simétrica* que, como su nombre indica, no depende del orden de los conjuntos. Está definida por

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

**Ejemplo.** Para  $A$ ,  $B$  y  $C$  como en el ejemplo anterior, hallar  $A \Delta B$  y  $A \Delta C$ .

Sabemos que  $A \setminus B = \{1\}$  y  $B \setminus A = \emptyset$ , por tanto  $A \Delta B = A \setminus B = \{1\}$ . De la misma forma,  $A \setminus C = \{1, 2\}$  y  $C \setminus A = \{4, 5\}$  implican  $A \Delta C = \{1, 2, 4, 5\}$ .

**Comentario.** A pesar de su aspecto artificial, la diferencia simétrica tiene un significado práctico. Al comparar dos conjuntos de datos nos permite compararlos diciendo qué datos no son comunes, lo cual es relevante para detectar errores.

Con suerte, el siguiente ejemplo teórico sencillo aclarará el comentario anterior y los propios conceptos de diferencia y diferencia simétrica.

**Ejemplo.** Decidir si para cualesquiera conjuntos  $A$  y  $B$  se cumple 1)  $A \setminus B = \emptyset \implies A = B$ , 2)  $A \Delta B = \emptyset \implies A = B$ .

Con el ejemplo anterior ya es fácil ver que 1) es falso. En general, basta tomar  $B = A \cup C$  con  $C$  no vacío y  $A \cap C = \emptyset$ . Así,  $A = \{1\}$ ,  $B = \{1, 2\}$  cumplen  $A - B = \emptyset$  y  $A \neq B$ . Sí sería cierto 1')  $A \setminus B = \emptyset \wedge A \supset B \implies A = B$ .

Por otro lado, el comentario hace sospechar que 2) es cierto. Vamos a probarlo con el contrarrecíproco. Si negamos  $A = B$  entonces existe  $x \in A \wedge x \notin B$  o  $x \notin A \wedge x \in B$  (recuerda que  $A = B$  equivale a  $A \subset B$  y  $A \supset B$ ). En el primer caso  $x \in A \setminus B$  y en el segundo  $x \in B \setminus A$ , así pues, en cualquier caso  $x \in A \Delta B$  negando que este conjunto es vacío.

En ciertas ocasiones uno supone que solo trabaja con subconjuntos de un conjunto grande  $U$ , llamada *conjunto universal* (por ejemplo en gran parte del curso de Cálculo I es natural considerar  $U = \mathbb{R}$ ). En ese caso, para  $A \subset U$  se dice que  $A^c = U \setminus A$  es el *conjunto complementario* de  $A$ . Con este concepto la diferencia de conjuntos se puede redefinir como  $A \setminus B = A \cap B^c$ . La operación de hallar el complementario es involutiva, esto es,  $(A^c)^c = A$ .

El análogo de las leyes de Morgan es:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{y} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

La razón de estas igualdades es que en la definición de  $\cup$  aparece un “o” en la de  $\cap$  un “y”.

**Ejemplo.** Demostrar la segunda fórmula.

Se tienen las equivalencias  $x \in (A \cap B)^c \iff x \notin A \cap B \iff x \notin A \vee x \notin B$ . La segunda es porque decir que  $x$  no está en  $A$  y  $B$  es lo mismo que decir que no está en alguno de ellos. Lo último equivale a  $x \in A^c \vee x \in B^c$ , esto es,  $x \in A^c \cup B^c$ . Entonces hemos probado que  $(A \cap B)^c$  y  $A^c \cup B^c$  tienen los mismos elementos.

Finalmente, introducimos el *producto cartesiano*  $A \times B$  de dos conjuntos, que significa el conjunto de *pares ordenados*  $(a, b)$  con  $a \in A$  y  $b \in B$ . Como el nombre sugiere, los pares ordenados son como conjuntos de dos elementos en los que importa el orden. Es un poco desafortunado que la notación coincida con la de los intervalos abiertos, pero por el contexto es difícil que haya confusión.

**Ejemplo.** Calcular  $\{2, 3\} \times \{1, \pi\}$ .

Según la definición, es el conjunto  $\{(2, 1), (2, \pi), (3, 1), (3, \pi)\}$ .

No es difícil ver que para conjuntos finitos se tiene  $|A \times B| = |A| |B|$ .

**Comentario.** Un par  $(a, b)$  se puede definir de manera rigurosa como el conjunto  $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ . Esta es una manera elegante y artificial de imponer que el orden sea importante a pesar de que solo usamos conjuntos en los que el orden de los elementos es irrelevante. Seguramente esto te parezca ahora una locura matemática y cuando veas en Fundamentos de Programación cómo se definen los árboles binarios en C/C++, te lo parecerá menos.

**Ejemplo (Teórico).** Explicar la igualdad  $A \times \emptyset = \emptyset$ .

Por definición, los elementos de  $A \times \emptyset$  son pares  $(a, b)$  con  $a \in A$  y  $b \in \emptyset$ . Como  $\emptyset$  no tiene elementos esto lleva a una contradicción, por tanto  $A \times \emptyset$  no tiene ningún elemento o, equivalentemente, es el vacío.

### 3. Funciones

Intuitivamente, una *función*  $f$  de un conjunto  $A$  en otro  $B$ , indicado con  $f : A \longrightarrow B$ , es una manera de asignar a cada elemento de  $A$  un elemento de  $B$ .

**Comentario.** Esta definición es suficiente para este curso, pero con lo que hemos aprendido podríamos dar una rigurosa cuyo barroquismo la relega a textos avanzados de matemáticas. Si te quieres asustar con ella, aquí va: Una función de  $A$  en  $B$  es un subconjunto  $f \subset A \times B$  que tiene las propiedades

$$1) \quad \forall x \in A \exists y \in B : (x, y) \in f \quad \text{y} \quad 2) \quad (x, y_1), (x, y_2) \in f \implies y_1 = y_2.$$

Un buen ejercicio de yoga mental es pensar por qué esto captura la idea intuitiva. Si te planteas hacerlo, quizá debieras haber escogido el doble grado informática-matemáticas.

Al conjunto  $A$  se le llama *dominio* de  $f : A \rightarrow B$ . Para cualquier  $A_0 \subset A$  y  $B_0 \subset B$  se definen la *imagen* y la *imagen inversa*, respectivamente, como los conjuntos

$$f(A_0) = \{f(a) : a \in A_0\} \quad \text{y} \quad f^{-1}(B_0) = \{a \in A : f(a) \in B_0\}.$$

En particular, se dice que  $f(A)$  es la *imagen* de  $f$  y a menudo se escribe  $\text{Im}(f)$ .

**Ejemplo.** Dada la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  con  $f(x) = x^2 + 2$ , determinar los conjuntos  $\text{Im}(f)$ ,  $f^{-1}(\{1, 11\})$  y  $f^{-1}((2, \infty))$ .

Al elevar al cuadrado los números reales salen todos los reales mayores o iguales que cero, por tanto  $\text{Im}(f) = f(\mathbb{R}) = [2, \infty)$ . Si  $x^2 + 2 \in \{1, 11\}$  entonces  $x^2 = 1 - 2$  o  $x^2 = 11 - 2$ , lo primero no ocurre nunca y lo segundo lleva a  $x = \pm 3$ , así pues  $f^{-1}(\{1, 11\}) = \{-3, 3\}$ . Para cualquier  $x \in \mathbb{R}$  distinto de cero  $x^2 + 2 > 0$ , de ello es fácil  $f^{-1}((2, \infty)) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Ejemplo.** Si  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  viene definida por  $f(n) = (-1)^n$  entonces  $\text{Im}(f) = \{-1, 1\}$ ,  $f^{-1}(\{1\}) = \{\text{números pares}\}$  y  $f^{-1}(\{-1, 1\}) = \mathbb{Z}$ .

**Ejemplo.** Si  $f : T \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $T$  es el conjunto de todos los triángulos y  $f$  asigna a cada uno de ellos la suma de sus ángulos (en grados), entonces  $\text{Im}(f) = \{180\}$  y  $f^{-1}(\{90\}) = \emptyset$  porque un resultado de geometría elemental asegura que  $f$  toma el valor constante 180.

Tanto en la asignatura de Álgebra como en la de Cálculo I es conveniente definir unos calificativos para  $f : A \rightarrow B$  que tratan de reflejar cierta información que podría preservarse al pasar de  $A$  a  $B$ . Se dice que:

- $f$  es *sobreyectiva* (o *suprayectiva* o *sobre*) si  $\text{Im}(f) = B$
- $f$  es *inyectiva* (o *uno a uno*) si  $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ .
- $f$  es *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva.

Según esto, una función  $f : A \rightarrow B$  es sobre si y sólo si se alcanzan todos los valores de  $B$ . Es inyectiva cuando dos elementos distintos de  $A$  se aplican siempre en dos elementos distintos de  $B$ . Así pues, si queremos demostrar que cierta  $f$  no es sobreyectiva debemos encontrar un elemento de  $B$  que no esté en la imagen de  $f$ , mientras que si queremos demostrar que no es inyectiva debemos encontrar dos elementos distintos de  $A$  cuyas imágenes por  $f$  coincidan.

**Ejemplo.**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(x) = x^2 + 2$  no es sobreyectiva porque  $\text{Im}(f) = [2, \infty)$ , tampoco es inyectiva porque  $f(1) = f(-1)$ .

**Ejemplo.**  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  con  $f(x) = 2x$  es sobreyectiva ya que cada número racional  $a/b$  está en la imagen de  $f$ , lo cual se sigue de  $f(a/2b) = a/b$ . También es inyectiva porque  $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ . Por tanto, es biyectiva.

**Ejemplo.**  $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Q}$  dada por  $f((a, b)) = a/b$  es sobreyectiva, pero no es inyectiva porque, por ejemplo,  $f((-6, 9)) = f((-4, 6))$ .

Es conveniente considerar la aplicación sucesiva de dos funciones para conseguir otra. Sean  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow C$ . Se define la *composición* de  $g$  y  $f$  como la función  $g \circ f : A \rightarrow C$  tal que  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ .

**Ejemplo.** Sean  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  y  $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  tales que  $f(n) = 2n - 1$  y  $g(n) = 2/(n^2 + 1)$ , entonces  $g \circ f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  con  $(g \circ f)(n) = g(2n - 1) = 1/(2n^2 - 2n + 1)$ .

**Ejemplo.** Sean  $f : \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$  y  $g : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{-1\}$  definidas por  $f(x) = (x + 2)/(x + 1)$  y  $g(x) = (2 - x)/(x - 1)$ , entonces  $g \circ f : \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{-1\}$  cumple  $(g \circ f)(x) = x$ .

La función  $f : A \rightarrow A$  que deja todos los elementos invariantes, esto es,  $f(x) = x$  para todo  $x \in A$ , se llama *función identidad* y se suele denotar con  $1_A$ . También se emplea a veces la notación  $\text{Id}_A$ .

Dada  $f : A \rightarrow B$ , se dice que  $g : B \rightarrow A$  es la *inversa* de  $f$ , y se escribe  $g = f^{-1}$ , si se cumple

$$1) \ g \circ f = 1_A \quad \text{y} \quad 2) \ f \circ g = 1_B.$$

Así, las funciones del último ejemplo son inversas la una de la otra.

A pesar de la coincidencia de la notación, no hay que confundir la imagen inversa y la función inversa. La primera se aplica a subconjuntos y siempre existe y la segunda se aplica a elementos y no siempre existe.

**Comentario.** En la definición anterior no basta comprobar 1) o 2) para que la otra condición se cumpla automáticamente. Por ejemplo, si  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : \mathbb{R} \rightarrow A$  donde  $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$  vienen dadas por  $g(x) = x^2$  y  $f(x) = \sqrt{x}$  (donde  $\sqrt{\phantom{x}}$  indica, como es habitual, la raíz cuadrada con valores en  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ), se cumple  $(g \circ f)(x) = (\sqrt{x})^2 = x$  para todo  $x \in A$ , sin embargo no se verifica  $(f \circ g)(x) = x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  ya que los negativos no cumplen  $\sqrt{x^2} = x$ .

Intuitivamente, la inversa de una función de  $A$  en  $B$  es simplemente considerarla en sentido contrario, de  $B$  en  $A$ . Esto requiere que cada elemento de  $B$  tenga exactamente una preimagen, es decir, que la función sea biyectiva. Formalizando esta idea se puede probar

$$f : A \rightarrow B \text{ es invertible (tiene inversa)} \iff f \text{ es biyectiva.}$$

Además  $(f^{-1})^{-1} = f$ . Una vez que conocemos esta caracterización, la definición original de inversa y el comentario subsiguiente pierden fuerza porque para funciones biyectivas 1) y 2) son equivalentes.

**Ejemplo.** Ya habíamos visto que  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $f(x) = 2x$  es biyectiva. Calcular su inversa.

Supongamos que  $x = f^{-1}(y)$ , entonces  $f(f^{-1}(y)) = 2f^{-1}(y)$  y por tanto  $f^{-1}(y) = y/2$ .

**Ejemplo.** Sabiendo que  $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{2\}$  con  $f(x) = 2x/(x-1)$  es biyectiva (ejercicio), calcular su inversa.

Se puede proceder poniendo como antes  $x = f^{-1}(y)$  y, por tanto,  $y = 2f^{-1}(y)/(f^{-1}(y)-1) \Rightarrow yf^{-1}(y) - y = 2f^{-1}(y) \Rightarrow (y-2)f^{-1}(y) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = y/(y-2)$ .

Es fácil darse cuenta de que el proceso llevado a cabo para calcular la inversa de una función  $f$  biyectiva se reduce a despejar la  $y$  en  $x = f(y)$ , obteniéndose  $y = f^{-1}(x)$ . En términos formales, lo que estamos haciendo es utilizar 2) de la definición.

**Ejemplo (Teórico).** Demostrar que  $f : A \longrightarrow B$  biyectiva  $\implies f$  invertible.

Si  $f$  es biyectiva en particular es sobreyectiva y para cada  $b \in B$  existe  $a \in f^{-1}(\{b\})$ . No puede existir ningún otro  $a' \in f^{-1}(\{b\})$  porque en ese caso  $f(a) = f(a') = b$  y  $f$  no sería inyectiva. Definimos  $g(b)$  como el único elemento de  $f^{-1}(\{b\})$ . Para cada  $a \in A$  se tiene  $a \in f^{-1}(\{f(a)\})$ , por tanto se cumple 1) en la definición de la inversa. Por otro lado, 2) se sigue de  $f(f^{-1}(\{b\})) = \{b\}$ .

La implicación  $f$  invertible  $\implies f$  biyectiva es más sencilla y se deja como ejercicio. En breve, 1) implica la inyectividad y 2) implica la sobreyectividad.