Lógica elemental

Ingeniería informática Curso: Álgebra

Fernando Chamizo https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/

Comentarios

Hay que reconocer que la lógica elemental tiene escasa presencia en los exámenes y apenas aparecerá explícitamente en el resto del curso. Su propósito es crear un marco de trabajo básico conectando con temas que seguramente ya conoces, como las tablas de verdad. También está en el espíritu del resto del curso, dando una base sólida abstracta a nuestra intuición.

1. Proposiciones y tablas de verdad

En lógica, una *proposición* es un enunciado al que se puede asignar el calificativo de verdadero o falso, que indicaremos con V y F. A veces también se usan 1 y 0, más cerca de la estética informática. Fuera del mundo perfecto y, a veces, ilusorio de las matemáticas, la mayoría de las expresiones del lenguaje común se alejan de las proposiciones lógicas o bien porque no tiene sentido su certeza (por ejemplo, "¡Felicidades!" o "¿Cómo te llamas?") o porque están sujetas a opiniones e indefiniciones (por ejemplo, "Soy idiota" o "El *grindcore* es una basura"). La lógica se distancia de las opiniones pidiendo solo que se pueda asignar un valor verdadero o falso independientemente de que tú te lo creas.

Los *operadores lógicos*, también llamados *conectivos*, se aplican sobre las proposiciones para producir otras nuevas. Sus símbolos y significados se recogen en esta tabla:

Símbolo	Uso	Significado
$\neg$	$\neg P$	Negación. Lo contrario de P
$\wedge$	$P \wedge Q$	P y Q
$\vee$	$P \vee Q$	P o Q (o ambas)
$\Longrightarrow$	$P \implies Q$	Si P entonces Q

El último operador lógico presenta algunas variaciones naturales de notación. Así $P \Longleftarrow Q$ es lo mismo que $Q \implies P$ mientras que $P \iff Q$ indica $(P \implies Q) \wedge (P \Longleftarrow Q)$. En palabras, que P es verdadero si y solo si Q es verdadero (también, P es falso si y solo si Q es falso). Cuando se cumple $P \iff Q$ se dice que P y Q son *equivalentes*.

En realidad, a pesar de la importancia de las implicaciones en matemáticas, este operador lógico no es estrictamente necesario pues $P \implies Q$ equivale a $\neg(P \wedge \neg Q)$. En palabras, a negar que se pueda dar P y no Q.

Comentario. Los operadores $\neg$, $\wedge$ y $\vee$ se corresponden en electrónica digital a las puertas lógicas NOT, AND y OR, en las que se basa la arquitectura de los ordenadores. Dicho sea de paso, los computadores cuánticos funcionan con puertas lógicas cuánticas asociadas a ciertas matrices lo que los acerca más a la segunda mitad del curso. A poco que hayas programado en cualquier lenguaje informático seguro que has empleado `not`, `and` y `or`, quizá con notaciones algo distintas.

Para analizar la certeza o la falsedad de proposiciones compuestas de otras a través de operadores lógicos se usan las *tablas de verdad* que están formadas por los resultados obtenidos al asignar todas las posibilidades V o F a las proposiciones que las componen. Para ello, lo que debemos tener claro son las tablas de verdad asociadas a los operadores lógicos:

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \implies Q$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V

Los dos últimas entradas de la última columna pueden sorprender y merecen un comentario. En breve, lo que indican es que de una premisa falsa se puede sacar cualquier conclusión. En términos más formales, la equivalencia antes citada con $\neg(P \wedge \neg Q)$, debería despejar cualquier duda.

Las equivalencias lógicas entre dos proposiciones se traducen en tablas de verdad coincidentes.

Ejemplo. Comprobar las siguientes equivalencias lógicas, llamadas *leyes de Morgan*:

$$1) \quad \neg(P \wedge Q) \iff (\neg P) \vee (\neg Q), \qquad 2) \quad \neg(P \vee Q) \iff (\neg P) \wedge (\neg Q).$$

Las tablas de verdad del lado izquierdo de 1) y 2) se construyen con

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

y

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	V
F	F	F	V

En cada caso, la tercera columna es solo auxiliar para hacer los cálculos, la información importante está en la última.

Por otro lado, para las tablas de verdad del lado izquierdo de 1) y 2) escribimos:

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

y

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Las proposiciones que son siempre ciertas se llaman *tautologías*. El ejemplo más simple es $P \vee \neg P$ que con palabras es decir que siempre algo es verdadero o no lo es. En ello radica el propio concepto de proposición.

Ejemplo. Comprobar que realmente $P \vee \neg P$ es una tautología examinando su tabla de verdad.

Todo lo que hay que hacer es verificar que obtenemos una columna de verdaderos. Como solo hay una proposición P, solo hay dos valores que asignar.

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
V	F	V
F	V	V

Comentario. En general, cuando tengamos una proposición compuesta por n proposiciones básicas, tendremos que considerar 2^n posibilidades en la tabla de verdad, pues, por combinatoria elemental, son todas las formas en que podemos asignarles los etiquetas V y F.

2. Predicados y cuantificadores

Una proposición que depende de variables se dice que es un *predicado*. Es como considerar muchas proposiciones al tiempo. Cada una de ellas puede ser verdadera o falsa.

Ejemplo. El predicado "El número n es par", que tiene a n como variable, es falso para $n = 2025$, pero cierto para $n = 2026$.

Los símbolos $\forall$ y $\exists$ se llaman *cuantificadores* y preceden a la variable x con el siguiente significado:

$$\forall x \text{ significa "para todo } x\text{"}, \qquad \exists x \text{ significa "existe algún } x\text{"}.$$

Las variables pertenecen a algún conjunto, por ello son construcciones comunes $\forall x \in C$ y $\exists x \in C$, donde $\in$ significa "pertenece", como repasaremos más adelante. Cuando seguimos los cuantificadores de un predicado estamos afirmando su veracidad en el ámbito indicado.

$$\begin{array}{lll} \forall x\ P(x) & \text{significa} & \text{"para todo } x \text{ se cumple } P(x)\text{"}, \\ \exists x\ P(x) & \text{significa} & \text{"existe algún } x \text{ para el que se cumple } P(x)\text{"}. \end{array}$$

En el segundo caso a veces se escribe $\exists x : P(x)$ pues ":" es una abreviatura de "tal que". Una pequeña variante es $\exists! x\ P(x)$ para indicar que existe un único valor de la variable x para el que se cumple $P(x)$.

Ejemplo. Decidir si $\forall x \in \mathbb{R}\ x^2 + 1 > 0$ y $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 = 3$ son ciertos.

Lo primero es verdadero porque x^2 es mayor o igual que cero y, por tanto, x^2+1 es positivo. Lo segundo es falso porque los números (reales) que al cuadrado dan 3 son $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$, que no son enteros.

Negar un $\forall$ da lugar a un $\exists$ y viceversa. Concretamente,

$$\neg\big(\forall x\ P(x)\big) \iff \exists x\ \neg P(x).$$

En palabras, decir que es falso que $P(x)$ se cumple para todo x es lo mismo que decir que existe algún x para el que $P(x)$ no se cumple. Análogamente,

$$\neg\big(\exists x\ P(x)\big) \iff \forall x\ \neg P(x).$$

Ejemplo. Escribir $\forall\ x \in \mathbb{R}\ x^2 - 3x + 2 > 0$ en una forma equivalente que no involucre $\forall$.

Según la última fórmula, sustituyendo $P(x)$ por $x^2 - 3x + 2 \leq 0$, se tiene que

$$\forall\ x \in \mathbb{R}\ x^2 - 3x + 2 > 0 \iff \neg\big(\exists x \in \mathbb{R}\ x^2 - 3x + 2 \leq 0\big).$$

Se está usando que negar $x^2 - 3x + 2 > 0$ es lo mismo que afirmar $x^2 - 3x + 2 \leq 0$.

3. Métodos de demostración

Los *teoremas* establecen resultados matemáticos a partir de hipótesis que damos por ciertas. Por ello, en gran medida guardan la estructura $P \implies Q$, de forma explícita o implícita.

No hay recetas mágicas para hacer demostraciones matemáticas, las cuales pueden ser muy difíciles y requerir grandes dosis de creatividad. En este curso para ingenieros no vamos a insistir mucho sobre ellas. Aquí nos limitamos a indicar algunos tipos de demostraciones señalando su relación con la lógica y dando ejemplos sencillos.

Una demostración es *directa* si probamos $P \implies Q$ partiendo de que P es cierta y, quizá con pasos intermedios, concluimos que Q es cierta.

Ejemplo. Demostrar que si n es impar entonces $n^2 - 1$ es divisible por 4.

Si n es impar entonces $n-1$ y $n+1$ son pares, por tanto, $n^2-1 = (n-1)(n+1)$ es múltiplo de 4.

Se dice que $\neg Q \implies \neg P$ es el *contrarrecíproco* de $P \implies Q$. Ambas proposiciones son equivalentes y, por consiguiente, podemos demostrar cualquier implicación pasando a su contrarrecíproca.

Ejemplo. Demostrar que si $2^n - 1$ no es múltiplo de 3 entonces n es impar.

El contrarrecíproco es "si n es par entonces $2^n - 1$ es múltiplo de 3". Si n es par, $n = 2k$ y utilizando la identidad $2^{2k} - 1 = (2^2 - 1)\big(2^{2k-2} + 2^{2k-4} + \cdots + 2^2 + 1\big)$ se tiene que $2^{2k} - 1$ es divisible por 3.

El método de *reducción al absurdo* está basado en la equivalencia entre $\neg(\neg Q)$ y Q. Para demostrar Q se parte de lo contrario, $\neg Q$, y si se llega, quizá con implicaciones intermedias, a algo falso, entonces hemos concluido la demostración porque sabremos que $\neg(\neg Q)$ es verdadero.

Ejemplo (Euclides, c. 300AC). Demostrar por reducción al absurdo que existen infinitos números primos.

Suponemos que existe solo hay un número finito de primos $p_1, p_2 \ldots, p_n$. Sea M su producto. Todo número natural mayor que 1 es divisible por un primo, entonces existe p_j que divide a $M + 1$. Como p_j divide a $M + 1$ y a M, también divide a $(M + 1) - M = 1$, lo cual es una contradicción.

Para resultados matemáticos que involucran números naturales hay un método de demostración bastante útil llamado *inducción*. Lo verás con detalle en Cálculo I. En informática está muy relacionado con algoritmos (sobre todo del tipo "divide y vencerás") y funciones recursivas.