

Congruencias

1. Demuestra que $n(n^2 - 1)(n^2 - 2)(n^2 + 3)/7$ es entero para todo $n \in \mathbb{Z}$.
2. En un reloj de manillas (de 12 horas), ¿qué hora es 11^{11} horas después de las 11?
3. Caracteriza los $n \in \mathbb{Z}$ tales que $n^3 + 2n + 3$ es divisible por 5.
4. Dado $n \in \mathbb{N}$ sea c_0 la cifra de las unidades, c_1 la de las decenas, c_2 la de las centenas, etc. Explica por qué n y $c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \dots$ dejan el mismo resto al ser divididos por 11.
5. Demuestra que si un múltiplo de 27 tiene 6 cifras, al intercambiar las tres primeras y las tres últimas, sigue siendo múltiplo de 27. Indicación: $1000 \equiv 1 \pmod{27}$.
6. Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo y $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq p - 1$. Demuestra que p divide al número combinatorio $\binom{p}{k} := \frac{p!}{k!(p-k)!}$ y concluye $a^p + b^p \equiv (a + b)^p \pmod{p}$ para todo $a, b \in \mathbb{Z}$. Busca un contraejemplo a esta congruencia para algún p que no sea primo.
7. Demuestra que 2025 divide a $1^{101} + 2^{101} + \dots + 2023^{101} + 2024^{101} + 2025^{101}$. Indicación: ¿Con qué es congruente $k^{101} + (2025 - k)^{101}$ módulo 2025?
8. Comprueba que todos los elementos de $\mathbb{Z}_{24}^*$ coinciden con su propio inverso.
9. Determina los inversos de $\overline{13}$ y de $\overline{-15}$ en $\mathbb{Z}_{23}$. Determinalos también en $\mathbb{Z}_{31}$.
10. Para $m = 7$ y $m = 10$ determina $\mathbb{Z}_m^*$ e indica cuál es el inverso de cada uno de sus elementos.
11. Si $p > 2$ es primo, halla una fórmula para el inverso de $\overline{2}$ en $\mathbb{Z}_p$.
12. Halla todas las soluciones de las ecuaciones siguientes o indica por qué no existe solución.
a) $\overline{13}\overline{x} = \overline{2}$ en $\mathbb{Z}_{23}$, b) $\overline{16}\overline{x} = \overline{7}$ en $\mathbb{Z}_{100}$, c) $6x \equiv -10 \pmod{26}$, d) $15x \equiv 10 \pmod{20}$.
13. Para $m = 101$ y 9630 determina el cardinal de $\mathbb{Z}_m^*$.
14. ¿Qué día de la semana es 3^{2025} días después del lunes?
15. Calcula $15^{2098} \pmod{14}$.
16. Calcula el resto de dividir 6^{234} entre 13.
17. Determina si $15002^{8003} + 11^8$ es divisible por 15.
18. Demuestra que el entero $5^{31} - 5$ es múltiplo de 7.
19. Demuestra que el entero $13^{232} - 15$ es múltiplo de 11.
20. Demuestra que 14 divide a $3^{611} - 5^{25}$.