

Aritmética de enteros

1. Decir si las siguientes afirmaciones sobre divisibilidad son verdaderas o falsas para $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ cualesquiera dando una pequeña explicación o un contraejemplo:

$$\begin{aligned} (i) \quad d \mid a^2 &\implies d \mid a, & (ii) \quad d \mid a \vee d \mid b &\iff d \mid ab, \\ (iii) \quad d \mid a &\implies db \mid ab & (iv) \quad d = \text{mcd}(a, b) &\implies \text{mcd}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1, \\ (v) \quad \text{mcd}(a, a+1) &= 1, & (vi) \quad \text{mcd}(a, b) &= \text{mcd}(ab^2 + b, a). \end{aligned}$$

2. Calcular los siguientes máximos comunes divisores usando el algoritmo de Euclides:

$$\text{mcd}(798, 1911), \quad \text{mcd}(-36291, 4562), \quad \text{mcd}(-21168, -3564).$$

3. Hallar todos los elementos del conjunto $\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \text{mcd}(a, b) = 10 \wedge \text{mcm}(a, b) = 100\}$.

4. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ no simultáneamente cero con $\text{mcd}(a, b) = d$, definimos $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow M_d$ como $f(x, y) = ax + by$ donde M_d es el conjunto de enteros múltiplos de d . Estudia si f es inyectiva o sobreyectiva.

5. Hallar el conjunto de soluciones enteras de las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } 111x + 36y = 15, \quad \text{b) } 10x - 26y = 1224, \quad \text{c) } 6x + 10y = 20.$$

6. Hallar las soluciones positivas de las siguientes ecuaciones diofánticas:

$$\text{a) } 32x + 17y = 1210, \quad \text{b) } 29x + 35y = 3942.$$

7. Hallar las soluciones enteras de $11x - 13y = 1$ que satisfagan $\max\{|x|, |y|\} < 13$.

8. Calcular dos números naturales múltiplos de 36 y 45 respectivamente cuya suma sea 243.

9. Suponiendo que Venus, la Tierra y Marte tardan 225, 365 y 687 días, respectivamente, en girar alrededor del Sol (estos datos son solo aproximados). ¿Cada cuánto tiempo están en la misma posición que hoy?

10. El laboratorio se ha gastado 50340 euros en ordenadores IBM y HP. Si los ordenadores IBM cuestan a 1500 euros cada uno y los HP a 1080 euros, ¿cuántos se han comprado de cada marca?

11. Un grupo de amigos decide ir al cine. La película en la Sala 1 cuesta 11 euros, y la película en la Sala 2 cuesta 13 euros. Indicar cuántos amigos son sabiendo que en total se gastaron 150 euros.

12. En Madrid tocan TzeTze y simultáneamente en las afueras VG. Una pandilla de amigos se divide entre los dos conciertos. La entrada para TzeTze cuesta 31,80 euros y para VG, 15 euros. Si se han gastado en total 600,60 euros, ¿cuántos amigos formaban la pandilla?

13. Decimos que un punto de coordenadas enteras $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0, 0)\}$ es visible desde el origen si el segmento que une dicho punto con el origen no pasa por ningún otro punto. ¿Cuánto vale $\text{mcd}(x, y)$ si (x, y) es un punto visible? ¿Cuántos puntos impiden “ver” el punto $(42, 45)$?

14. La sucesión de Fibonacci $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 \dots$ está definida de manera recurrente por $a_1 = a_2 = 1$ y $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Calcular cuántos pasos requiere hallar $\text{mcd}(a_{n+2}, a_{n+1})$ con el algoritmo de Euclides. **Nota:** Estos son los números para los que el algoritmo de Euclides es más largo.

15. Sabemos que dados dos enteros no nulos a y b , existen primos $p_1, \dots, p_s$ de modo que

$$a = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s} \quad \text{y} \quad b = \pm p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_s^{\beta_s} \quad \text{con } \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

- a) Expresar $\text{mcd}(a, b)$ y $\text{mcm}(a, b)$ en función de estas factorizaciones.
- b) Calcular $\text{mcd}(3059, 1547)$ y $\text{mcm}(3059, 1547)$ con a) y con el algoritmo de Euclides.
16. Calcular razonadamente la descomposición de $17! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 16 \cdot 17$ en factores primos.
17. Si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$ es la descomposición en factores primos de $n \in \mathbb{N}$. ¿Cuántos divisores positivos tiene n ? Si $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es la función que asigna a cada número natural su número de divisores positivos, dar una descripción sencilla del conjunto $f^{-1}(\{\text{impares}\})$.
18. Sea $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{n} \in \mathbb{N}$.
19. Sea $n \in \mathbb{N}$ y denotemos $M_n = 2^n - 1$. Demostrar que M_n primo $\implies n$ primo. Indicación: Emplear la identidad $x^m - 1 = (x - 1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1)$ eligiendo adecuadamente de x y m .
20. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, y denotemos $F_n = 2^n + 1$. Demostrar que F_n primo $\implies n$ potencia de dos. Indicación: Utilizar que si m es impar $x^m + 1 = (x + 1)(x^{m-1} - x^{m-2} + \cdots - x + 1)$ y tratar de repetir el argumento del ejercicio anterior.