Relaciones de equivalencia

1. Considerar la relación sobre $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ definida por:

$$(m, n)\mathcal{R}(m', n') \iff m \cdot n' = m' \cdot n.$$

   (a) Probar que es una relación de equivalencia.

   (b) ¿Puedes describir las clases de equivalencia y el conjunto cociente?

2. Consideramos ahora la relación sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por:

$$(m, n)\mathcal{R}(m', n') \iff m \cdot n' = m' \cdot n.$$

   ¿Es esta relación de equivalencia?

3. En el conjunto $\mathbb{R}$ se define la siguiente relación:

$$x\mathcal{R}y \iff \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor,$$

   donde $\lfloor z \rfloor = \text{máx}\{m \in \mathbb{Z} \colon m \leq z\}$ (la parte entera de z). Demuestra que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y halla el conjunto cociente.

4. En el conjunto de rectas del plano $\mathbb{R}^2$ se considera la siguiente relación:

$$r_1 \mathcal{R}\, r_2 \iff r_1 = r_2 \quad \text{ó} \quad r_1 \quad \text{es paralela a } r_2.$$

   (a) Comprueba que es una relación de equivalencia.

   (b) Halla la clase de equivalencia de la recta $2x + 3y - 1 = 0$.

   (c) Describe el conjunto cociente hallando un conjunto X de números y $g : \mathbb{R}^2/\mathcal{R} \to X$ biyectiva.

5. Se considera la siguiente relación en $\mathbb{R}$:

$$x\mathcal{R}y \iff x^2 = y^2.$$

   Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. Obtener el conjunto cociente.

6. Sean X e Y conjuntos y $f \colon X \to Y$ una función. Se considera la siguiente relación en X:

$$x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y).$$

   (a) Demuestra que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en X.

   (b) Obtén el conjunto cociente.

   (c) ¿Cuál es el conjunto cociente si f es una biyección?

7. Sea A un conjunto y B un subconjunto no vacío de A. En el conjunto $\mathcal{P}(A)$ se considera las siguientes relaciones:

   - $X\mathcal{R}_1Y \iff X \cap B = Y \cap B$.
   - $X\mathcal{R}_2Y \iff X \cup B = Y \cup B$.
   - $X\mathcal{R}_3Y \iff X \setminus B = Y \setminus B$.

   Estudia si son relaciones de equivalencia y, en caso afirmativo, describe los conjuntos cocientes.