

Conjuntos y funciones

1. Los siguientes conjuntos están descritos implícitamente (por comprensión). Descríbelos explícitamente (por extensión):

$$\begin{array}{ll} a) \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 = 0\} & b) \{x \in \mathbb{Z} : x^2 - 5x + 6 = 0\} \\ c) \{x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} \text{ tal que } y < 5 \text{ y } x = y^2\} & d) \{x \in \mathbb{N} : x < 3\} \\ e) \{x \in \mathbb{N} : \nexists y \in \mathbb{N} \text{ tal que } y + 5 < x\} & f) \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2 = 0\}. \end{array}$$

2. Sean $S = \{a, b, c, d\}$, $T = \{1, 2, 3\}$ y $U = \{b, 2\}$. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son correctas?

$$\begin{array}{lll} (1) \{a\} \in S & (2) a \in S & (3) \{a, c\} \subset S \\ (4) \emptyset \in S & (5) \{a\} \subset \mathcal{P}(S) & (6) \{\{a\}, \{a, b\}\} \in \mathcal{P}(S) \\ (7) \{a, c, 2, 3\} \subset S \cup T & (8) U \subset S \cup T & (9) b \in S \cap U \\ (10) \{b\} \subset S \cap U & (11) \{1, 3\} \in T & (12) \{1, 3\} \subset T \\ (13) \{1, 3\} \in \mathcal{P}(T) & (14) \{\emptyset\} \in \mathcal{P}(S) & (15) \emptyset \in \mathcal{P}(S) \\ (16) \emptyset \subset \mathcal{P}(S) & (17) \{\emptyset\} \subset \mathcal{P}(S). \end{array}$$

3. Sean $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = \{3, 4, 5, 7, 8, 9\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 9\}$, $V = \{2, 4, 6, 8\}$ subconjuntos del conjunto $\mathbb{N}$ (de números naturales). Calcular:

$$\begin{array}{lllll} (a) S \cap U & (b) (S \cap T) \cup U & (c) (S \cup U) \cap V & (d) (S \cup V) \setminus U & (e) (U \cup V \cup T) \setminus S \\ (f) (S \cup V) \setminus (T \cap U). \end{array}$$

4. Demuestra las siguientes igualdades.

$$\begin{array}{ll} (a) (A \cup B)^c = A^c \cap B^c & (b) (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ (c) (A \cup B) \cap A = A & (d) (A \cap B) \cup A = A \end{array}$$

5. Calcula el conjunto de partes del conjunto vacío, es decir, calcula $\mathcal{P}(\emptyset)$.

6. Probar las siguientes afirmaciones o dar un contraejemplo:

$$(1) \mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \quad (2) \mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

7. Indica cuáles son los elementos del conjunto $S \times (V \setminus S)$ para S y V como en el ejercicio 3.

8. Comparar los siguientes conjuntos, siendo $S = \{a, b\}$, $T = \{a\}$, $V = \{1, 2\}$ y $U = \{1\}$:

$$(a) (S \times V) \setminus (T \times U) \quad (b) (S \setminus T) \times (V \setminus U).$$

9. Decir si es verdadero o falso que para cualesquiera conjuntos A , B y C ,

$$\begin{array}{ll} (i) A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) & (ii) |A \cup B| = |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B| \\ (iii) A \times (B \triangle C) = (A \times B) \triangle (A \times C) & (iv) \mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \\ (v) A \subset B \iff \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B) & (vi) A \setminus B = A \setminus C \implies B = C. \end{array}$$

Donde A y B son conjuntos finitos en el apartado *ii*).

10. ¿Cuáles de las siguientes funciones son inyectivas?, ¿cuáles suprayectivas?, ¿hay alguna biyectiva?
Empieza asegurándote de que efectivamente son funciones.

$$\begin{aligned} (i) \quad f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad f(m) &= m + 2 & (ii) \quad g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad g(n) &= n(n + 1) \\ (iii) \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) &= \sqrt{x^2 + 1} & (iv) \quad f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \quad f(x) &= x^2 + 4x \\ (v) \quad g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \quad g(n) &= n/(n + 1) & (vi) \quad g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \quad g(n) &= n^2. \end{aligned}$$

11. Se consideran las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} i) \quad f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 + 1, \\ ii) \quad f: \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}, \quad f(n) = 2n + 4, \\ iii) \quad f: \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Q}, \quad f(x) = 2x + 4. \end{aligned}$$

Halla la imagen: $\text{Im}(f)$ y $f^{-1}(\{0\})$ en cada uno de los casos.

12. Sea $a \in \mathbb{R}$ no nulo. Comprobar que $f: \mathbb{R} \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{a\}$, dada por $f(x) = \frac{ax}{x-a}$ es biyectiva y calcular su inversa.

13. Decidir si las siguientes funciones $f, g: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ son inyectivas, suprayectivas o biyectivas

$$f(n) = \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ es par,} \\ 2n & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad \text{y} \quad g(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par,} \\ n+1 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

14. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 0, \\ x - 27 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Comprobar si f es inyectiva y/o sobreyectiva. Calcular $f \circ f$.

15. Da ejemplos de funciones $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ de cada uno de los siguientes tipos:

- Inyectiva pero no suprayectiva.
- Suprayectiva pero no inyectiva.
- Biyectiva.
- Ni inyectiva ni suprayectiva.

16. Si $f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ y $A, B \subset \mathcal{U}$, decir si son verdaderas o falsas las fórmulas

$$\begin{aligned} i) \quad f(A) \cap f(B) &= f(A \cap B) & ii) \quad f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) &= f^{-1}(A \cap B) \\ iii) \quad f^{-1}(f(A)) &= A & iv) \quad f^{-1}(A^c) &= (f^{-1}(A))^c. \end{aligned}$$

17. Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x) = x^3 - 3x$. Calcular las siguientes imágenes e imágenes inversas de intervalos: $f((0, 2))$, $f([-1, 3])$, $f^{-1}((0, \infty))$ y $f^{-1}((-\infty, -2])$.

18. Si $f: A \longrightarrow B$ y $g: B \longrightarrow C$ son biyectivas, demostrar que $g \circ f$ también lo es y que

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

19. Indica cuántas funciones biyectivas se pueden definir del conjunto $\{a, b, c\}$ en sí mismo.

20. Sea A finito con $|A| = n$. Indica cuántas funciones biyectivas se pueden definir de A en A .