Inicial primer apellido

Álgebra, examen parcial 2.

1º del Grado en Ingeniería Informática, curso 2025-2026 — 7 de noviembre de 2025

Apellidos y Nombre _____ D.N.I. _____

Enunciados con soluciones

Problema 1. Sean $P(n)=601n^3+4n^2+n-2$ y $Q(n)=n^2-n-2$ con $n\in\mathbb{Z}$.

- [2 puntos] Demuestra que al dividir $P(n)$ y $Q(n)$ por 6 se obtiene en ambos casos el mismo resto, cualquiera que sea n.

Solución. Con la notación de las congruencias, debemos probar $P(n)\equiv Q(n)$ (mód 6), esto es, $R(n)\equiv 0$ (mód 6) con $R(n)=P(n)-Q(n)$. Se tiene, reduciendo lo coeficientes módulo 6,

$$R(n)=601n^3+3n^2+2n\equiv n^3+3n^2+2n=n(n+1)(n+2).$$

Un razonamiento elemental es que como n, $n+1$ y $n+2$ son tres números consecutivos, alguno será par y alguno será múltiplo de tres, por tanto, el producto es divisible por 6. La alternativa, quizá más usual, es comprobar todas las clases de $\mathbb{Z}_6$. Claramente $R(\overline{n})=\overline{0}$ para $\overline{n}\in\{\overline{0},\overline{5},\overline{4}\}$, porque anulan cada uno de los factores. Por otro lado, $R(\overline{1})=\overline{6}=\overline{0}$, $R(\overline{2})=\overline{24}=\overline{0}$ y $R(\overline{3})=\overline{60}=\overline{0}$.

- [1.5 puntos] Caracteriza de forma sencilla todos los valores de n tales que $P(n)$ es divisible por 5.

Solución. Se tiene $P(n)\equiv n^3-n^2+n-2$ (mód 5). Sustituyendo todas las clases en $\mathbb{Z}_5$, se sigue

$$P(\overline{0})=\overline{-2}\neq\overline{0},\quad P(\overline{1})=\overline{-1}\neq\overline{0},\quad P(\overline{2})=\overline{4}\neq\overline{0},\quad P(\overline{3})=P(\overline{-2})=\overline{-16}\neq\overline{0},\quad P(\overline{4})=P(\overline{-1})=\overline{-5}=\overline{0}.$$

Así pues, $P(n)\equiv 0$ (mód 5) si y solo si $n\in\overline{4}$, en otras palabras, si y solo si es de la forma $5k+4$ con $k\in\mathbb{Z}$.

Problema 2. [3.5 puntos] Calcula todas las soluciones enteras de $31x+23y=80$. ¿Existe alguna con $x,y\in\mathbb{N}$?

Solución. Efectuando el algoritmo de Euclides y la tabla, obtenemos una solución de la identidad de Bezout $ax_0+by_0=d$. En nuestro caso, $a=31$, $b=23$ y se tiene $d=1$:

$$\begin{aligned} 31 &= 23\cdot 1+8\\ 23 &= 8\cdot 2+7\\ 8 &= 7\cdot 1+1\\ 7 &= 1\cdot 7+0 \end{aligned}$$

		1	2	1	7
1	0	1	2	**3**	
0	−1	−1	−3	**−4**	

Preservamos el signo porque el número de pasos es par. En definitiva $(x_0,y_0)=(3,-4)$ satisface $31x_0+23y_0=1$. Ahora aplicamos la fórmula para resolver la ecuación diofántica $ax+by=c$:

$$x=\frac{cx_0+bt}{d}=240+23t,\quad y=\frac{cy_0-at}{d}=-320-31t\qquad\text{con}\quad t\in\mathbb{Z}.$$

Estas son todas las soluciones enteras de la ecuación.

Para que $y>0$ se tiene que cumplir $t\leq -11$, porque $(-31)(-10)<320$, y en ese caso $x<0$ porque $23\cdot 11>240$. Por consiguiente, es imposible conseguir $x,y\in\mathbb{N}$ y no hay soluciones naturales.

Problema 3. Decidir razonadamente si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos:

- [1 punto] Si $a,b\in\mathbb{N}$ con $\mathrm{mcd}(a,b)=\mathrm{mcm}(a,b)$, entonces $a=b$.

Solución. Es verdadero. Supongamos $a\neq b$ y sea $c=\mathrm{mín}(a,b)$, el menor de los dos. Como $\mathrm{mcd}(a,b)$ es divisor de ambos, $\mathrm{mcd}(a,b)\leq c$ y como $\mathrm{mcm}(a,b)$ es múltiplo de ambos, debe ser al menos del tamaño del mayor, por tanto, $\mathrm{mcd}(a,b)\leq c<\mathrm{mcm}(a,b)$, lo que contradice la hipótesis $\mathrm{mcd}(a,b)=\mathrm{mcm}(a,b)$.

- [1 punto] Para todo p primo y $m,n\in\mathbb{N}$ con $m>n\geq 2$, $|\mathbb{Z}_{p^m}^*|>|\mathbb{Z}_{p^n}^*|$.

Solución. Es verdadero. Sabemos que $|\mathbb{Z}_\ell^*| = \varphi(\ell)$ y $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ para p primo. Entonces hay que comprobar $p^m - p^{m-1} > p^n - p^{n-1}$. Esto equivale a $p^m(1-p^{-1}) > p^n(1-p^{-1})$, lo cual es cierto porque $m>n$.

- [1 punto] Para todo p primo y $m\in\mathbb{N}$, el número $m^{2p}-m^{p+1}+m^p-m$ es múltiplo de p.

Solución. Es verdadero. El pequeño teorema de Fermat implica $m^p \equiv m \pmod{p}$, sin restricciones sobre m. Por tanto, $m^{2p}\equiv m^2 \pmod{p}$ y $m^{p+1}=m^p\cdot m\equiv m^2 \pmod{p}$. Al combinar estas tres congruencias se sigue que la cantidad del enunciado es congruente con cero módulo p.
