

Inicial primer apellido

Álgebra, examen parcial 1.

1º DEL GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA, CURSO 2025-2026

10 DE OCTUBRE DE 2025

APELLIDOS Y NOMBRE _____ D.N.I. _____

Instrucciones: Justifique todas las respuestas. Las respuestas no claras o poco justificadas no recibirán crédito. Escriba con letra clara y legible.

Problema 1.

- [2 puntos] Decide razonadamente si para todo $A, B \subset \mathbb{Z}$ y toda $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ se cumple $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
- [1.5 puntos] Dado el conjunto $C = \{1, \{2, \{1\}\}\}$, halla el conjunto de partes de C .

Problema 2. Encuentra f y g con las siguientes propiedades, justificando tu respuesta:

- [1 punto] $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ ni inyectiva ni sobreyectiva.
- [2 puntos] $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ biyectiva.

Problema 3. Se definen las relaciones $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ en el conjunto de los números reales no nulos $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ de forma que para todos $x, y \in X$

$$x\mathcal{R}_1y \iff x-y \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad x\mathcal{R}_2y \iff x/y \in \mathbb{Z}.$$

- [2 puntos] Estudia si son relaciones de equivalencia.
- [1.5 puntos] Halla $[1] = \bar{1}$ (la clase del 1) para aquella o aquellas que sean de equivalencia

Soluciones:

Problema 1.

- [2 puntos] Decide razonadamente si para todo $A, B \subset \mathbb{Z}$ y toda $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ se cumple $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Solución: Es falso. Por ejemplo, sea $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, $A = \{1\}, B = \{2\}$. Entonces

$$A \cap B = \emptyset, \quad f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset, \quad f(A) = f(B) = 0, \quad f(A) \cap f(B) = \{0\}.$$

- [1.5 puntos] Dado el conjunto $C = \{1, \{2, \{1\}\}\}$, halla el conjunto de partes de C .

Solución: Los elementos del conjunto C son 1 y $\{2, \{1\}\}$. Los subconjuntos de C son

$$\emptyset, \quad \{1\}, \quad \{\{2, \{1\}\}\}, \quad \{1, \{2, \{1\}\}\}.$$

En definitiva,

$$\mathcal{P}(C) = \left\{ \emptyset, \quad \{1\}, \quad \{\{2, \{1\}\}\}, \quad \{1, \{2, \{1\}\}\} \right\}.$$

Problema 2. Encuentra f y g con las siguientes propiedades, justificando tu respuesta:

- [1 punto] $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ ni inyectiva ni sobreyectiva.

Solución: La función constante $f(n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, no es inyectiva, porque $f(1) = f(2) = 1$ y $1 \neq 2$, y tampoco es sobreyectiva porque $2 \in \mathbb{N}$ no está en la imagen de f , que es solo el 1.

- [2 puntos] $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ biyectiva.

Solución: Hay varias formas de construir funciones así. Por ejemplo,

$$0 \rightarrow 1, \quad (-1) \rightarrow 2, \quad 1 \rightarrow 3, \quad (-2) \rightarrow 4, \quad 2 \rightarrow 5, \quad (-3) \rightarrow 6, \quad 3 \rightarrow 7, \dots$$

o más preciso,

$$f(n) = 2n + 1, \quad \text{si } n \geq 0,$$

mientras que

$$f(n) = -2n, \quad \text{si } n < 0.$$

Problema 3. Se definen las relaciones $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ en el conjunto de los números reales no nulos $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ de forma que para todos $x, y \in X$

$$x\mathcal{R}_1y \iff x - y \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad x\mathcal{R}_2y \iff x/y \in \mathbb{Z}.$$

- [2 puntos] Estudia si son relaciones de equivalencia.

Solución:

- $\mathcal{R}_1$ es una relación de equivalencia:
 - Reflexiva: $x\mathcal{R}_1x$ para todo $x \in X$ porque $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$.
 - Simétrica: Si $x\mathcal{R}_1y$, entonces $x - y = k \in \mathbb{Z}$; pero $y - x = (-k) \in \mathbb{Z}$, así que $y\mathcal{R}_1x$.
 - Transitiva: Si $x\mathcal{R}_1y$, $y\mathcal{R}_1z$, se tiene que $x - y = k \in \mathbb{Z}$, and $y - z = \ell \in \mathbb{Z}$. Pero entonces $x - z = (x - y) + (y - z) = k + \ell \in \mathbb{Z}$, así que $x\mathcal{R}_1z$.
- $\mathcal{R}_2$ no es una relación de equivalencia, ya que no cumple la propiedad simétrica: $2\mathcal{R}_21$ porque $2/1 = 2 \in \mathbb{Z}$, pero $1 \not\mathcal{R}_22$, ya que $1/2 \notin \mathbb{Z}$.
- [1.5 puntos] Halla $[1] = \bar{1}$ (la clase del 1) para aquella o aquellas que sean de equivalencia

Solución: $[1]$ es el conjunto

$$[1] = \{x \in X : x\mathcal{R}_1 1\} = \{x \in X : x - 1 \in \mathbb{Z}\} = \{n + 1 \in X : n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$