	Inicial primer apellido

Álgebra, examen final, convocatoria ordinaria.

1º del Grado en Ingeniería Informática, curso 2025-2026 — 12 de enero de 2026

Apellidos y Nombre ______________________________ D.N.I. ____________

Instrucciones: Justifica todas las respuestas. La duración es de 3 horas .

Problema 1. Sea la función $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{Q}$ dada por $f(n)=\frac{1}{4}(2n+1)^2$.

(a) [1.5 puntos] Estudia si es inyectiva y si es sobreyectiva.

(b) [1 punto] Encuentra alguna $g:\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{N}$ tal que la composición $g\circ f$ sea biyectiva.

Solución (a): Para ver si f es inyectiva, consideramos $m,n\in\mathbb{N}$ con $f(m)=f(n)$. Entonces

$$\frac{1}{4}(2m+1)^2=\frac{1}{4}(2n+1)^2\Longrightarrow(2m+1)^2=(2n+1)^2\Longrightarrow|2m+1|=|2n+1|\Longrightarrow 2m+1=2n+1,$$

ya que $2m+1$, $2n+1$ son positivos al ser $m,n\geq 1$. De $2m+1=2n+1$ obtenemos entonces que $m=n$, y por tanto f es inyectiva.

Para ver si f es sobreyectiva, observamos que $f(n)=\frac{1}{4}(2n+1)^2\geq 0$, así que no puede existir ningún $n\in\mathbb{N}$ con $f(n)=-1$; como $-1\in\mathbb{Q}$, f no es sobreyectiva.

Solución (b): Para $n\in\mathbb{N}$, $f(n)=\frac{1}{4}(2n+1)^2=(n+\frac{1}{2})^2$; podemos entonces definir g como

$$g(q)=\begin{cases} n, & \text{si } q=(n+\frac{1}{2})^2 \text{ para algún } n\in\mathbb{N},\\ 1, & \text{si } q \text{ es de otra forma.}\end{cases}$$

Entonces $(g\circ f)(n)=g\big((n+\frac{1}{2})^2\big)=n$, que es biyectiva por ser la función identidad.

Problema 2. [2.5 puntos] Escribe una fórmula que dé todas las soluciones $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ de $29x+8y=2$ y encuentra razonadamente una de ellas que tenga $100\leq y<129$.

Solución: Comenzamos aplicando el algoritmo de Euclides a los coeficientes de la ecuación $29x+8y=2$.

$$\begin{aligned} 29 &= 8\cdot 3+5\\ 8 &= 5\cdot 1+3\\ 5 &= 3\cdot 1+2\\ 3 &= 2\cdot 1+1\\ 2 &= 1\cdot 2+0 \end{aligned}$$

Esto nos dice que el máximo común divisor de 29 y 8 es $d=1$.
Hallamos $x_0,y_0\in\mathbb{Z}$ con $29x_0+8y_0=1$ con el método de la tabla:

	3	1	1	1	2
1	0	1	1	2	3
0	-1	-3	-4	-7	-11

Como hay un número impar de pasos en el algoritmo de Euclides, tenemos que cambiar el signo, y por tanto $x_0=-3$ e $y_0=11$ son solución de la ecuación $29x+8y=1$. Por lo visto en clase sobre soluciones de la ecuación de Bezout, se tiene que todas las soluciones de la ecuación que aparece en el examen son

$$x=\frac{2\cdot(-3)+8t}{1}=-6+8t,\qquad y=\frac{2\cdot 11-29t}{1}=22-29t,\qquad t\in\mathbb{Z}.$$

Para encontrar una solución con $100\leq y<129$, tenemos que hallar un $t\in\mathbb{Z}$ con $100\leq 22-29t<129$. Resolviendo,

$$100 \leq 22-29t, \quad 78 \leq -29t \quad -\frac{78}{29} \geq t \quad -2 > -\frac{78}{29} \geq t,$$

y también

$$22-29t < 129 \quad -29t < 107 \quad t > -\frac{107}{29} > -4,$$

así que el único $t \in \mathbb{Z}$ que cumple simultáneamente ambas desigualdades es $t=-3$. Por lo tanto, la solución pedida es

$$x=-6+8\cdot(-3)=-30, \quad y=22-29\cdot(-3)=109.$$

Problema 3. [2.5 puntos] Resuelve el sistema

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2+x_3+5x_4 &= 0, \\ x_1+2x_2+x_3+x_4 &= 0, \\ x_1+2x_2+3x_3-5x_4 &= 0 \end{cases}$$

y escribe el conjunto de soluciones en la forma $\{\lambda\vec{u}+\mu\vec{v} : \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$ con $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^4$.

Soluciones: Aplicamos Gauss a la matriz asociada al sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3+2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Esto corresponde al sistema

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_4 &= 0, \\ x_3-3x_4 &= 0 \end{cases}$$

Denotando $x_2=\lambda$, $x_4=\mu$, tenemos que

$$\begin{cases} x_1 &= -2\lambda-4\mu, \\ x_3 &= 3\mu \end{cases}$$

y todas las soluciones son de la forma $(-2\lambda-4\mu,\lambda,3\mu,\mu)$, esto es,

$$\lambda(-2,1,0,0)+\mu(-4,0,3,1), \qquad \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$$

Problema 4. Decide razonadamente si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos donde $\mathcal{M}_n$ indica el conjunto de matrices reales $n \times n$:

(a) [0.75 puntos] Para cualquier $A \in \mathcal{M}_2$ se cumple $|45A|=2025|A|$.

Solución: Si A es una matriz cuadrada de orden 2, entonces

$$|45A|=45^2|A|=2025|A|,$$

así que el enunciado es verdadero.

(b) [0.75 puntos] Un autovalor de $A \in \mathcal{M}_{2026}$ también lo es siempre de A^t.

Solución: Si $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ es una autovalor de A, entonces es una raíz del polinomio característico $p(x)=|A-xI|$, esto es, cumple que

$$p(\lambda_0)=|A-\lambda_0 I|=0$$

Pero el determinante de una matriz cuadrada coincide con el determinante de su matriz traspuesta, por lo que

$$|(A-\lambda_0 I)^t|=0.$$

Como $(A-\lambda_0 I)^t=A^t-\lambda_0 I^t=A^t-\lambda_0 I$,

$$|A^t-\lambda_0 I|=0,$$

y λ_0 es entonces raíz del polinomio característico para A^t. Por lo tanto, λ_0 es una autovalor de A^t y el enunciado es verdadero.

(c) [1 punto] Para cualquier aplicación lineal $f:\mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ su núcleo es distinto de $\{\vec{0}\}$.

Solución: Sea $f:\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal. Sabemos que

$$\dim(\ker f)+\dim(\operatorname{imagen} f)=\dim \mathbb{R}^5=5.$$

Por otra parte, imagen$f$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, así que $\dim(\operatorname{imagen} f)\leq 3$. Entonces

$$5=\dim(\ker f)+\dim(\operatorname{imagen} f)\leq \dim(\ker f)+3 \Longrightarrow \dim(\ker f)\geq 5-3=2,$$

y por lo tanto $\ker f$ no puede ser $\{\vec{0}\}$, que solo tiene dimensión 0. Por lo tanto el enunciado es verdadero.
