ÁLGEBRA	Grado en Ingeniería Informática Curso 2024–25	Examen 20/12/2024

Apellidos, Nombre: ______________________________ Grupo **112**

1	2	3	4	5	6	FINAL
10	15	18	10	12	20	85

Razonar debidamente las respuestas | **Escribe cada ejercicio en una hoja**

---

1. Discute y resuelve, según los valores de los parámetros $a, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones lineales representado por la siguiente matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 \end{array}\right).$$

---

2. Se considera el subespacio U de $\mathbb{R}^4$ generado por $\{(1,-1,0,1),(2,-1,1,1)\}$.

(a) Demuestra que $\mathcal{B} = \{(1,-1,0,1),(2,-1,1,1)\}$ es una base de U.

(b) Calcula a para que el vector $\vec{u} = (2, a, 3, -1)$ pertenezca a U.

(c) Para el valor de a encontrado en el apartado (b), calcula las coordenadas de $\vec{u}$ con respecto de la base $\mathcal{B}$ de U.

---

3. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Halla $f(1,-1,1)$.

(b) Halla $f^{-1}(\{(2,1,2,1)\})$.

(c) Halla una base del núcleo de f.

(d) Halla una base de la imagen de f.

(e) Comprueba que se cumple la fórmula de las dimensiones.

(continúa en la siguiente página)

4. Explica si el conjunto

$$V = \{(t,t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{Z}\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

---

5. Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$

$$W_1 : \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad W_2 = \langle (1,-1,0,1), (2,1,1,1) \rangle .$$

(a) Calcula la dimensión de $W_1 \cap W_2$.

(b) Calcula unas ecuaciones de $W_1 + W_2$.

(c) Comprueba que se satisface la fórmula de Grassmann.

---

6. Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Sabiendo que los valores propios de A son 1 y -2 (no hace falta que lo demuestres), calcula los subespacios de vectores propios asociados.

(b) Razona si A es diagonalizable. En caso afirmativo, encuentra una matriz invertible P y una matriz diagonal D tales que $A = PDP^{-1}$.