

UNA SOLUCIÓN

① a) Verdadero

$$\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8} \}$$

$$\qquad\qquad\qquad \qquad\qquad\qquad \begin{matrix} \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ -4 & -3 & -2 & -1 \end{matrix}$$

Cuadrados en $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{7}, \bar{16} \} = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{7} \}$

Cubos en $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{-1} \}$

$$\Rightarrow \bar{x}^3 + \bar{y}^3 + \bar{z}^3 \in \{ \bar{0}, \pm \bar{1}, \pm \bar{2}, \pm \bar{3} \} \not\equiv \pm \bar{4}$$

$x, y, z \in \mathbb{Z}$

① b) Falso

$n=8 \quad (\pm 3)^2 \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow x \equiv \pm 3 \pmod{8}$
 es solución de $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$
 y $\pm 3 \not\equiv \pm 1 \pmod{8}$.

① c) Verdadero

Sea $d \mid 8n+3$ y $d \mid 3n+1$

$$\Rightarrow d \mid \underbrace{[3(8n+3) - 8(3n+1)]}_{\substack{\parallel \\ 24n+9-24n-8 \\ \parallel \\ 1}} \Rightarrow d=1$$

Por lo tanto: $\text{mcd}(8n+3, 3n+1) = 1$.

② Vamos a calcular $7^{(7^7)} \pmod{11}$

El Pequeño Teorema de Fermat dice:

$$7^{10} \equiv 1 \pmod{11} \quad (*)$$

Ahora módulo 10 = 11-1 es exponente:

$$7^7 = (7^2)^3 \cdot 7 \equiv 9^3 \cdot 7 \equiv (-1)^3 \cdot 7 \equiv -7 \equiv 3 \pmod{10}$$

$$\Rightarrow 7^7 = 3 + 10n \text{ para algun } n \in \mathbb{N}.$$

Ahora módulo 11:

$$7^{(7^7)} = 7^{3+10n} = 7^3 (7^{10})^n \stackrel{(*)}{\equiv} 7^3 \equiv 7(7^2) \equiv 7 \cdot 5 \equiv 2 \pmod{11}$$

$\Rightarrow 2$ es el resto de dividir $7^{(7^7)}$ por 11.

③ Vamos a aplicar el algoritmo de Euclides a los enteros 1547 y 3059:

$$3059 = 1547 \cdot 1 + 1512$$

$$1547 = 1512 \cdot 1 + 35$$

$$1512 = 35 \cdot 43 + 7$$

$$35 = 7 \cdot 5$$

Por lo tanto $\boxed{\text{mcd}(1547, 3059) = 7}$

Vamos a calcular los coeficientes de la Identidad de Bezout.

$$1512 = 35 \cdot 43 + 7 \Rightarrow 7 = 1512 - 35 \cdot 43$$

$$35 = 1547 - 1512 \cdot 1 \Rightarrow 7 = 1512 - (1547 - 1512 \cdot 1) \cdot 43$$

$$7 = (44) \cdot 1512 - (43) \cdot 1547$$

$$1512 = 3059 - 1547 \cdot 1 \Rightarrow 7 = (44)(3059 - 1547 \cdot 1) - (43)(1547)$$

$$7 = (44)(3059) - (87)(1547)$$

Conclusión:

$$44 \cdot 3059 - 87 \cdot 1547 = 7$$

(a) $1547x \equiv 70 \pmod{3059}$

utilizando la Identidad de Bezout

$$44 \cdot 3059 - 87 \cdot 1547 = 7$$

Multiplcamos por 10:

$$\boxed{440 \cdot 3059 - 870 \cdot 1547 = 70} \quad (*)$$

Módulo 3059:

$$-870 \cdot 1547 \equiv 70 \pmod{3059}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = -870}$$

(b) De (*) tenemos $(x_0, y_0) = (-870, 440)$

es una solución de la ecuación:

$$1547x + 3059y = 70$$

(c) El Teorema de la ecuación diofántica lineal nos dice que todas las soluciones enteras

$$\text{son: } \begin{cases} x = -870 + \frac{3059}{7}t = -870 + 437t, & t \in \mathbb{Z} \\ y = 440 - \frac{1547}{7}t = 440 - 221t \end{cases}$$

Ahora buscamos $x, y \in \mathbb{N}$:

$$\Rightarrow \begin{cases} -870 + 437t > 0 \Leftrightarrow t > \frac{870}{437} > 1 \\ 440 - 221t > 0 \Leftrightarrow t < \frac{440}{221} < 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \nexists t \in \mathbb{Z}$ tal que $x, y \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ No tiene soluciones con $x, y \in \mathbb{N}$