

APELLIDOS, NOMBRE: _____

GRUPO

1a	1b	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	FINAL
15	15	10	10	10	10	10	10	10	100

Razonar debidamente las respuestas

1. a) Pon un ejemplo de un conjunto A que cumpla

$$\{1, \{2\}\} \subset A, \quad \{0\} \in A, \quad \{3\} \cup \emptyset \in \mathcal{P}(A).$$

- b) Tres conjuntos A, B, C cumplen $A \subset B \cap C$ y $B \subset A$. Demuestra que $A = B$.

2. Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 1 & \text{si } x < 0, \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

- a) ¿Es f inyectiva?
b) ¿Es f sobreyectiva?
c) ¿Es f biyectiva? En caso afirmativo calcular $f^{-1}(y)$
d) Calcula $f^{-1}([0, 2])$.

3. Considera en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ la siguiente relación:

$$a \mathcal{R} b \iff a^2 + a = b^2 + b.$$

- a) Comprueba que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
b) Describe por extensión el conjunto $[1]$.
c) Halla $a \in \mathbb{R}$ tal que el cardinal de $[a]$ sea 1.

UNA SOLUCIÓN

P1

ÁLGEBRA
24/25

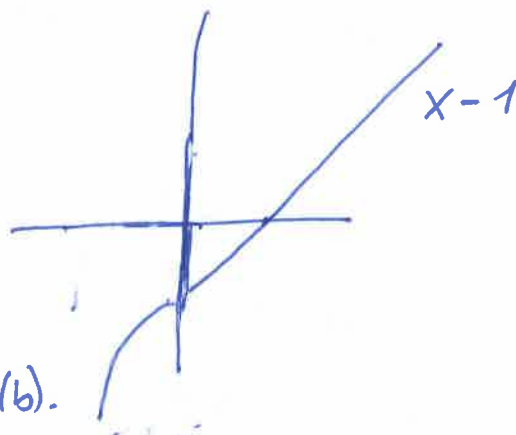
1) a) $A = \{1, \{2\}, \{0\}, 3\}$

b)
$$\left. \begin{array}{l} A \subset B \cap C \\ B \subset A \end{array} \right\} \Rightarrow A = B$$

Demo:

- $B \subset A$ por hipótesis
- Veamos $A \subset B$. Sea $a \in A \subset B \cap C$
 $\Rightarrow a \in B \wedge a \in C \Rightarrow a \in B \Rightarrow A \subset B$.

2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 1, & x < 0 \\ x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$$



a) ¿f es inyectiva?

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $f(a) = f(b)$.

Vamos a diferenciar varios casos:

1) $a, b < 0 \Rightarrow$
$$\begin{aligned} f(a) &= -a^2 - 1 \\ f(b) &= -b^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{f(a) = f(b)} \Leftrightarrow -a^2 - 1 = -b^2 - 1 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow |a| = |b|$$

Como $a, b < 0$ se tiene $\boxed{a = b}$.

2) $a, b \geq 0 \Rightarrow$
$$\begin{aligned} f(a) &= a - 1 \\ f(b) &= b - 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{f(a) = f(b)} \Leftrightarrow a - 1 = b - 1 \Leftrightarrow \boxed{a = b}$$

$$3) a > 0 \text{ y } b < 0 \Rightarrow \begin{cases} f(a) = a-1 \\ f(b) = -b^2+1 \end{cases}$$

$f(a) = f(b)$ es imposible ya que $a=2$

$$f(a) = a-1 > -1 \quad \text{si } a > 0$$

$$f(b) = -b^2+1 < -1 \quad \text{si } b < 0$$

y $a < 0$ y $b > 0$. Equivalente al caso anterior

Por lo tanto f es inyectiva

(b) ¿Es f sobreyectiva?

Hemos visto que $\begin{cases} f(x) \geq -1 & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) < -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Por lo tanto:

• Si $y \geq -1$ tendremos que buscar $x \geq 0$ tal que $f(x) = y$. Como $f(x) = x-1 \Rightarrow x = y+1$

• Si $y < -1$ " " " " $x < 0$ " "
" " " " $f(x) = -x^2+1 \Rightarrow y = -x^2+1$

$$\Rightarrow x^2 = -y+1 > 0 \Rightarrow \boxed{x = -\sqrt{-y+1}}$$

③ f es biyectiva porque hemos visto que es inyectiva en ① y sobreyectiva en ②:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y+1 & , y \geq -1 \\ -\sqrt{-y-1} & , y < -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{d} \quad f^{-1}([0,2]) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [0,2]\} \\ &= \{x < 0 \mid 0 \leq -x^2 - 1 \leq 2\} \\ &\quad \cup \\ &\quad \{x \geq 0 \mid 0 \leq x-1 \leq 2\} \\ &= \underbrace{\{x < 0 \mid 1 \leq -x^2 \leq 3\}}_{\emptyset} \cup \underbrace{\{x \geq 0 \mid 1 \leq x \leq 3\}}_{[1,3]} \\ &= [1,3] \end{aligned}$$

3

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$aRb \iff a^2 + a = b^2 + b$$

(a) Relación de equivalencia:

(i) Reflexiva: aRa ya que $a^2 + a = a^2 + a$

(ii) Simétrica: $aRb \Rightarrow a^2 + a = b^2 + b$
 $\Rightarrow b^2 + b = a^2 + a \Rightarrow bRa$

(iii) Transitiva:

$$\begin{array}{ccc} aRb \Rightarrow a^2 + a = b^2 + b & \nearrow & a^2 + a = c^2 + c \\ \downarrow & & \downarrow \\ bRc \Rightarrow b^2 + b = c^2 + c & & aRc \end{array}$$

(b) $[1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1Rx\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1^2 + 1 = x^2 + x\}$
 $= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 2 = 0\} = \{1, -2\}$

(c) $[a] = \{x \in \mathbb{R} \mid aRx\} = \{x \in \mathbb{R} \mid a^2 + a = x^2 + x\}$
 $= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - (a^2 + a) = 0\}$

$|[a]| = 1 \iff x^2 + x - (a^2 + a) = 0$ tiene una única solución.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(a^2 + a)}}{2} \text{ única}$$

$$\iff 4(a^2 + a) + 1 = 0$$

$$4a^2 + 4a + 1 = 0 \iff a = -\frac{1}{2}$$