

UNA SOLUCIÓN

① (a) Falso: $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \times B)$

Contrarejemplo: $A = B = \{1\}$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \underbrace{\{1\}}_A\}$$

$$A \times A = \{(1, 1)\}$$

$$\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, A), (A, \emptyset), (A, A)\}$$

$$\mathcal{P}(A \times A) = \{\emptyset, \underbrace{\{(1, 1)\}}_{A \times A}\} \neq$$

① (b) Falso: $f: A \rightarrow B \not\Rightarrow f(A) = B$

Contrarejemplo: $A = B = \{1, 2\}$

$$f(1) = f(2) = 1$$

$$\Rightarrow f(A) = \{f(1), f(2)\} = \{1, 1\} = \{1\} \neq B$$

$$(2) \quad h: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$n \longmapsto h(n) := \left| 2n + \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2} :$$

Así tenemos:

$$h(n) = \begin{cases} (2n + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} & \text{si } 2n + \frac{1}{2} > 0 \\ -(2n + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} & \text{si } 2n + \frac{1}{2} < 0 \end{cases}$$

Es decir:

$$h(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0 \\ -2n-1 & \text{si } n < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2n \neq 1, \forall n \geq 0 \\ -2n-1 = 1 \end{cases}$$

$$(a) \quad h^{-1}(\{1\}) = \{n \in \mathbb{Z} \mid h(n) = 1\} = \{-1\}$$

$$(b) \quad h(n) = h(m) \iff \begin{cases} 2n = 2m \\ 0 \\ -2n-1 = -2m-1 \end{cases} \iff n = m$$

Mirando que $h(n)$ es par si $n \geq 0$
y $h(n)$ es impar si $n < 0$

Injective

(c) Veamos que no es biyectiva.

Es decir que no es sobreyectivo.

Por ejemplo:

$$f^{-1}(\{-2\}) = \emptyset \quad \text{ya que} \quad \begin{cases} 2n = -2 \text{ con } n \geq 0 \text{ Imposible} \\ -2n-1 = -2 \text{ con } n < 0, \text{ Imposible} \\ n = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(3) \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a R b \Leftrightarrow a^4 = b^4$$

(a) R es relación de equivalencia

(i) Reflexiva: $a R a \Leftrightarrow a^4 = a^4$ ✓

(ii) Simétrica: $\underbrace{a R b}_{a^4 = b^4} \Rightarrow \underbrace{b R a}_{b^4 = a^4}$ ✓

(iii) Transitiva: $\underbrace{a R b}_{a^4 = b^4} \wedge \underbrace{b R c}_{b^4 = c^4} \Rightarrow \underbrace{a R c}_{a^4 = c^4}$ ✓

(b) $[1] = \{a \in \mathbb{R} \mid a R 1\}$
 $= \{a \in \mathbb{R} \mid a^4 = 1\} = \{+1, -1\}$

$$a^4 = 1 \Leftrightarrow a^4 - 1 = 0$$

$$(a^2 - 1)(a^2 + 1) = \underbrace{(a+1)}_{a=-1} \underbrace{(a-1)}_{a=+1} \underbrace{(a^2+1)}_{\text{Imposible en } \mathbb{R}}$$

(c) $[1] = \{a \in \mathbb{C} \mid a R 1\} = \{+1, -1, i, -i\}$

$$a^4 = 1 \Leftrightarrow a^4 - 1 = 0$$

$$(a+1)(a-1)\underbrace{(a^2+1)}_{(a+i^0)(a-i^0)} = 0$$