

# UNA SOLUCIÓN

① a) Falso

Contraejemplo:

$$S = \{1, 2\}, T = U = \{1\}$$

$$T \cup U = \{1\} \quad T \setminus S = \emptyset = U \setminus S$$

$$S \setminus (T \cup U) = \{2\}$$

$$(T \setminus S) \cup (U \setminus S) = \emptyset \quad \#$$

② b) Verdadero

$$\begin{aligned} h(x) &= (x^2, x^3) \Rightarrow (a, b) \\ h(y) &= (y^2, y^3) \Rightarrow (a, b) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{b}{a} \\ y = \frac{b}{a} \end{array} \right\} \Rightarrow x = y$$

③ c) Falso

Contraejemplo:

No se cumple la propiedad simétrica:

$$(1, 2) R (2, 3)$$

ya que  
 $1 < 2$

pero

$$(2, 3) \not R (1, 2)$$

ya que  
 $2 \not< 1 \wedge 2 \not< 1$

② Vamos a aplicar el algoritmo de Euclides a los enteros 220 y 407:

$$\left. \begin{array}{l} 407 = 220 \cdot 1 + 187 \\ 220 = 187 \cdot 1 + 33 \\ 187 = 33 \cdot 5 + 22 \\ 33 = 22 \cdot 1 + \boxed{11} \\ 22 = 11 \cdot 2 + 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{mcd}(407, 220) = 11 \quad \textcircled{a}$$

Vamos a calcular los coeficientes de la Identidad de Bezout:

$$\begin{aligned}
 11 &= 33 - 22 \cdot 1 = 33 - (187 - 33 \cdot 5) \cdot 1 = 33 \cdot 6 - 187 \\
 22 &= 187 - 33 \cdot 5 \\
 33 &= 220 - 187 \cdot 1 \\
 187 &= 407 - 220 \cdot 1
 \end{aligned}$$

//

$(220 - 187 \cdot 1) \cdot 6 - 187$

//

$6 \cdot 220 - 7 \cdot 187$

//

$6 \cdot 220 - 7 \cdot (407 - 220 \cdot 1)$

//

$11 = 13 \cdot 220 - 7 \cdot 407$

⑥ Utilizando la identidad de Bezout y multiplicando por 10:

$$130 \cdot 220 - 70 \cdot 407 = 110 \quad (*)$$

Modul 407:

$$130 \cdot 220 \equiv 110 \pmod{407}$$

$$\Rightarrow x = 130$$

© De la identidad  $\oplus$  tenemos

$$(x_0, y_0) = (130, -70)$$

es una solución particular de la ecuación diofántica lineal:

$$220x + 407y = 110$$

El Teorema de la ecuación diofántica lineal nos dice que todas las soluciones enteras son:

$$\begin{cases} x = 130 + \frac{407}{11}t = 130 + 37t \\ y = -70 - \frac{220}{11}t = -70 - 20t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

④ Ahora buscamos las soluciones positivas:

$$x = 130 + 37t > 0 \Leftrightarrow t > \frac{-130}{37}$$

$$y = -70 - 20t > 0 \Leftrightarrow t < \frac{-70}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{-70}{20} > t > \frac{-130}{37} \Rightarrow t \notin \mathbb{Z}$$

||                      S

-3.5                      -3.5

Por lo tanto  $\nexists x, y \in \mathbb{N}$  tal que

$$220x + 407y = 110$$

$$(3) \quad 101^{1324} + 100 \cdot 37 \pmod{11}$$

El Pequeño Teorema de Fermat nos dice:

$$a^{10} \equiv 1 \pmod{11}$$

Ahora: ~~ambos~~

$$1324 = 132 \cdot 10 + 4$$

$$101 \equiv 2 \pmod{11}$$

$$100 \equiv 1 \pmod{11}$$

$$37 \equiv 4 \pmod{11}$$

Por lo tanto:

$$101^{1324} + 100 \cdot 37 \equiv (2^{10})^{132} \cdot 2^4 + 1 \cdot 4 \pmod{11}$$

$$\equiv 1 \cdot 16 + 4 \pmod{11}$$

$$\equiv 5 + 4 \pmod{11}$$

$$\equiv 9 \pmod{11}$$

$\Rightarrow$  9 es el resto de dividir

$101^{1324} + 100 \cdot 37$   
entre 11

$$\begin{aligned}
 (4) \quad V &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underline{x-y-z=0}\} \\
 &\quad x=y+z \\
 &= \{ \underbrace{(y+z, y, z)}_{y(1,1,0)+z(1,0,1)} : y, z \in \mathbb{R} \} = \langle \{(1,1,0), (1,0,1)\} \rangle
 \end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (1,1,0) \text{ y } (1,0,1) \text{ LI}$$

$$\Rightarrow \{(1,1,0), (1,0,1)\} \text{ base de } V$$

$$V = \langle \{(1,2,1), (1,1,0)\} \rangle \text{ con } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{(1,2,1), (1,1,0)\} \text{ base de } V$$

(a)  $(x, y, z) \in V \Leftrightarrow \{(1,2,1), (1,1,0), (x, y, z)\} \text{ LI}$

$$\Leftrightarrow \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & y-2x \\ 0 & -1 & z-x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2x-y \\ 0 & 0 & \boxed{z+x-y} \end{pmatrix}$$

tiene rango 2  $\Leftrightarrow z+x-y=0$

$$\Rightarrow V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z+x-y=0\}$$

(b)  $\dim V = 2$  ya que  $\{(1,1,1), (1,1,0)\}$  es una base de  $V$   
tambien utilizando Rouché-Frobenius:

$$\dim V = 3 - \underset{\uparrow}{1} = 2$$

$n^{\circ}$  ecuaciones  
independientes que definen  $V$

$$c) \quad U \cap V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} x - y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{matrix} \} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} z = 0 \\ y = x \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\{ (x, x, 0) : x \in \mathbb{R} \}}_{x(1, 1, 0)} = \langle \{ (1, 1, 0) \} \rangle$$

$$\Rightarrow \{ (1, 1, 0) \} \text{ base de } U \cap V.$$

$$d) \quad U + V = \langle \{ (1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 0) \} \rangle$$

Veamos cuales son L.I.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U + V = \underbrace{\langle \{ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \} \rangle}_{\text{Base de } U + V}$$

Fórmula de Grassmann:

$$\dim U + \dim V = \dim (U + V) + \dim (U \cap V)$$

$$2 + 2 = 3 + 1$$



$$(5) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = f_A$$

$$(a) \quad \text{Ker}(f) = \text{Ker} A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Resolvamos este sistema de ecuaciones lineales homogéneas mediante Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}$$

$$\text{Ker}(f) = \{ (-z, z, z) : z \in \mathbb{R} \} = \langle \{ (-1, 1, 1) \} \rangle$$

$$(b) \quad f(x, y, z) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= (x+z, 2x+y+z, x+y)$$

6

$$f_a: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (2x + ax + ay, -ax + 2y - ay)$$

a)  $B_c = \{(1, 0), (0, 1)\}$

$$M_{B_c}(f_a) = \begin{pmatrix} f(1,0) & f(0,1) \\ 2+a & a \\ -a & 2-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1,0) \\ (0,1) \end{pmatrix}$$

$$f(1,0) = (2+a, -a), \quad f(0,1) = (a, 2-a)$$

b) 
$$p_{f_a}(x) = \left| \begin{pmatrix} 2+a & a \\ -a & 2-a \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right|$$
$$= \begin{vmatrix} 2+a-x & a \\ -a & 2-a-x \end{vmatrix} = (2-x+a)(2-x-a) + a^2$$
$$= (2-x)^2 - a^2 + a^2 = (x-2)^2$$

autovalores =  $\{2\}$  con  $d_2 = 2$

Calculamos la multiplicidad geométrica:

$$d_2 = \dim(\text{Ker} \begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix}) = 2 - \text{rango} \begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{si } a=0 \\ 1 & \text{si } a \neq 0 \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$f \text{ es diagonalizable} \iff d_2 = d_2 \iff a = 0$$