

APELLIDOS: _____

NOMBRE: _____

GRUPO

112

1a	1b	2	3a	3b	3c	4a	4b	4c
10	5	10	5	5	5	5	5	5
5a	5b	5c	5d	6a	6b	7a	7b	7c
5	5	5	5	5	5	5	5	5

Razonar debidamente las respuestas

3 horas

FINAL

/100

1. Calcular todas las soluciones $x, y \in \mathbb{Z}$ de las siguientes ecuaciones:

a) $267x + 112y = 3$.

b) $376x + 72y = 18$.

2. Demostrar que 5 divide a $3^{4n} - 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

3. Sea $\mathbb{R}_{>0}$ el conjunto de los números reales estrictamente positivos. Se define la función $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \frac{x}{x+1}.$$

a) Demostrar que f es inyectiva.

b) Calcular $\text{Im}(f)$.

c) Sea $f^n(x)$ la aplicación componer n veces f . Calcular $\text{Im}(f^n)$.

4. En $\mathbb{R}^2$, para $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, se define la relación:

$$P_1 \mathcal{R} P_2 \iff x_1 y_1 = x_2 y_2.$$

a) Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

b) Determinar la clase de $(0, 0)$ y de $(1, 1)$.

c) Determinar el conjunto cociente $\mathbb{R}^2 / \mathcal{R}$.

5. Consideramos los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} \quad \text{y} \quad V = \langle \{(1, 0, -1), (1, 1, 0)\} \rangle.$$

- a) Describe V como el conjunto de soluciones de un sistema lineal de ecuaciones.
 - b) Calcula la dimensión de V . Justifica tu respuesta.
 - c) Calcula una base de $U \cap V$.
 - d) Calcula una base de $U + V$. Verifica que se da la fórmula de Grassmann.
-

6. Sea $f = f_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación asociada a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Calcula una base del núcleo de f .
 - b) Calcula una base de la imagen de f .
-

7. Se considera $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por:

$$g(x, y) = (2x + y, x + 2y).$$

- a) Calcula la matriz de g en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.
 - b) Determina si g es diagonalizable.
 - c) Determina una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ formada por autovectores de g y la matriz de g en esta base $\mathcal{B}$.
-

UNA SOLUCIÓN

Álgebra 7/6/2024

1

① Primero recordemos el Teorema de la ecuación diofántica lineal que dice:

" Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ y $d = \gcd(a, b)$.

La ecuación $ax + by = c$ tiene solución

en $x, y \in \mathbb{Z} \iff d \mid c$

En este caso, si $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ es una solución particular, entonces el conjunto de soluciones es:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d} t \\ y = y_0 - \frac{a}{d} t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{Z} //$$

Además, el algoritmo de Euclides para calcular el mcd nos permite obtener una solución particular:

" Sean $r, s \in \mathbb{Z}$ de la identidad de Bezout

$$ra + sb = d$$

$$\Rightarrow a(nr) + b(ns) = nd = c$$

$$c = nd$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = nr \\ y_0 = ns. \end{cases} //$$

a) $\text{mcd}(267, 112)$.

$$267x + 112y = 3$$

$$267 = 112 \cdot 2 + 43 \quad 43 = 267 - 112 \cdot 2$$

$$112 = 43 \cdot 2 + 26 \quad 26 = 112 - 43 \cdot 2$$

$$43 = 26 \cdot 1 + 17 \quad 17 = 43 - 26 \cdot 1$$

$$26 = 17 \cdot 1 + 9 \rightarrow 9 = 26 - 17 \cdot 1$$

$$17 = 9 \cdot 1 + 8 \rightarrow 8 = 17 - 9 \cdot 1$$

$$9 = 8 \cdot 1 + \textcircled{1}$$

$$8 = 1 \cdot 8 + 0$$

Por lo tanto, $\text{mcd}(267, 112) = 1$

Hagamos Bezout:

$$1 = 9 - 8 \cdot 1 = 9 - (17 - 9 \cdot 1) \cdot 1 = 2 \cdot 9 - 17 = 2(26 - 17 \cdot 1) - 17 =$$

$$= 2 \cdot 26 - 3 \cdot 17 = 2 \cdot 26 - 3(43 - 26 \cdot 1) = -3 \cdot 43 + 5 \cdot 26$$

$$= -3 \cdot 43 + 5(112 - 2 \cdot 43) = -13 \cdot 43 + 5 \cdot 112 = -13(267 - 112 \cdot 2) + 5 \cdot 112$$

$$= -13 \cdot 267 + 31 \cdot 112$$

$$\Rightarrow x_0 = -13 \cdot 3, y_0 = 31 \cdot 3$$

$\Rightarrow$ Solución general es

$$\begin{cases} x = -13 \cdot 3 + 112 \cdot t \\ y = 31 \cdot 3 - 267 \cdot t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

b) $\text{mcd}(376, 72)$

$$376x + 72y = 18$$

$$376 = 72 \cdot 5 + 16$$

$$72 = 16 \cdot 4 + \textcircled{8}$$

$$16 = 8 \cdot 2 + 0$$

$$\text{mcd}(376, 72) = 8 \nmid 18 \Rightarrow \text{No hay solución}$$

(2) Veamos $5 \mid 3^{4n} - 1, \forall n \in \mathbb{N}$ mediante

inducción:

$$\boxed{n=1} \quad 5 \mid 3^{4 \cdot 1} - 1 = 80 \quad \checkmark$$

$\boxed{\text{H.I}}$ Suponemos cierto $5 \mid 3^{4n} - 1$

Veamos que es cierto para $n+1$:

$$3^{4(n+1)} - 1 = 3^{4n} \cdot 3^4 - 1 \equiv 3^4 - 1 \equiv 80 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$5 \mid 3^{4n} - 1 \Leftrightarrow 3^{4n} \equiv 1 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow 3^{4(n+1)} - 1 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$\text{Es decir } 5 \mid 3^{4(n+1)} - 1.$$

##

(3) $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{x}{x+1}$

(a) Veamos f es inyectiva:

$$\begin{array}{ccc} f(x) = f(y) & \xrightarrow{\text{?}} & x = y \\ \parallel & & \parallel \\ \frac{x}{x+1} & & \frac{y}{y+1} \end{array}$$

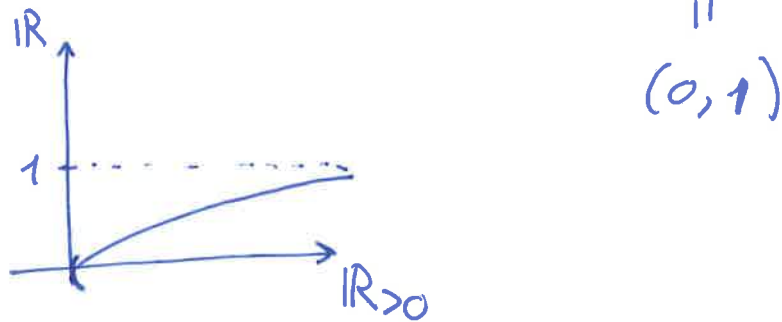
$\Uparrow$

$$x(y+1) = y(x+1)$$

$$xy + x = yx + y$$

$$x = y$$

⑥ $\text{Im}(f) = \{ y \in \mathbb{R} : f(x) = y \text{ para algún } x \in \mathbb{R}_{>0} \}$



⑦ Ativemos $f^n(x) = \frac{x}{nx+1}$. Vamos a demostrar.

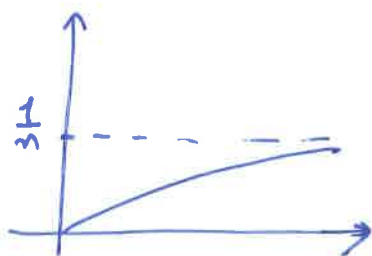
$\boxed{n=1}$ $f^1(x) = \frac{x}{x+1}$

$\boxed{HI}$ $f^n(x) = \frac{x}{nx+1}$

$n+1: f^{n+1}(x) = f\left(\frac{x}{nx+1}\right) = \frac{\frac{x}{nx+1}}{\left(\frac{x}{nx+1}\right) + 1} =$

$$= \frac{x}{x + nx + 1} = \frac{x}{(n+1)x + 1}$$

Así tenemos:



$$\text{Im}(f^n) = \left(0, \frac{1}{n}\right)$$

$$(4) \quad (x_1, y_1) R (x_2, y_2) \iff x_1 y_1 = x_2 y_2$$

(a) Veamos que es una relación de equivalencia:

• Reflexiva: $(x_1, y_1) R (x_1, y_1)$ ya que $x_1 y_1 = x_1 y_1$

• Simétrica: $(x_1, y_1) R (x_2, y_2) \iff (x_2, y_2) R (x_1, y_1)$

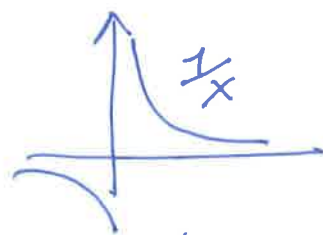
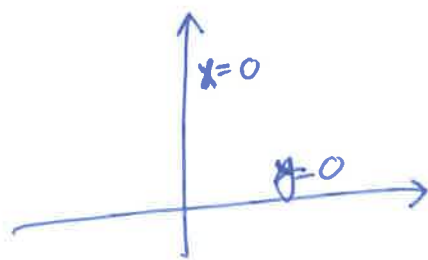
$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ x_1 y_1 = x_2 y_2 \iff x_2 y_2 = x_1 y_1 \end{array}$$

• Transitiva: $(x_1, y_1) R (x_2, y_2) \iff x_1 y_1 = x_2 y_2$

$$(x_2, y_2) R (x_3, y_3) \iff x_2 y_2 = x_3 y_3$$

$$\iff x_1 y_1 = x_3 y_3 \iff (x_1, y_1) R (x_3, y_3)$$

$$(b) \quad [(0,0)] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{(x,y) R (0,0)}_{xy=0}\} = \{x=0\} \cup \{y=0\}$$



$$[(1,1)] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1 \cdot 1\} = \{y = \frac{1}{x}\}$$

$$(c) \quad \mathbb{R}^2 / R = \{ [(x,y)] \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \} = \left\{ y = \frac{k}{x} : k \in \mathbb{R} \right\} \cup \{ [(0,0)] \}$$

↑
Hiperbolas.

$$\begin{aligned}
 (5) \quad U &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0 \} \\
 &= \{ (x, y, -x-y) : x, y \in \mathbb{R} \} \\
 &= \langle (1, 0, -1), (0, 1, -1) \rangle
 \end{aligned}$$

$\dim U = 2 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema Rouché-Frobenius}}}{n - \text{n}^\circ \text{ de ecuaciones linealmente independientes}}$

En V :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango} = 2 \Rightarrow \dim V = 2$$

Así que V estará definida por 1 ecuación.

$$(x, y, z) \in V \Leftrightarrow \{ (1, 0, -1), (0, 1, 1), (x, y, z) \} \text{ L.D}$$

$$\Leftrightarrow \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ -1 & 1 & z \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ -1 & 1 & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & x+z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & x+z-y \end{pmatrix}$$

Así obtenemos:

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+z-y=0 \}$$

$$c) U \cap V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{array} \right\}$$

4

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow U \cap V = \langle (1, 0, -1) \rangle$$

$$d) U + V = \langle \{ (1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 0, -1), (1, 1, 0) \} \rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U + V = \mathbb{R}^3$$

$$\dim(U + V) = 3$$

Grassmann:

$$\dim U + \dim V = \dim(U + V) + \dim(U \cap V)$$

$$2 + 2 = 3 + 1$$

$$(6) f = f_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(a) \text{Ker}(f) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (0, 0, 0) \}$$

$$= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Ker}(f) = \langle (-1, -1, 1) \rangle, \text{ Base de Ker}(f) = \{ (-1, -1, 1) \}$$

columns de A:

$$(b) \text{Im}(f) = \left\langle \underbrace{(1, -1, 1)}_{f(1, 0, 0)}, \underbrace{(-1, 3, 2)}_{f(0, 1, 0)}, \underbrace{(1, 0, 1)}_{f(0, 0, 1)} \right\rangle$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Base Im}(f) = \{ (1, 0, 1), (0, 1, 0) \}$$

7

$$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto g(x, y) = (2x + y, x + 2y)$$

$$(a) \quad M_{B_c}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad p_g(x) = |M_{B_c}(g) - I_2 \cdot x| = \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} = (2-x)^2 - 1$$

$$= x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

Como tenemos 2 soluciones distintas en un endomorfismo de $\mathbb{R}^2 \Rightarrow g$ diagonalizable.

También lo sabemos porque $M_{B_c}(g)$ es simétrica.

$$(c) \quad V_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = (x, y) \}$$

$$= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} = \{ (x, -x) : x \in \mathbb{R} \}$$

$$= \langle (1, -1) \rangle$$

$$V_3 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 3(x, y) \}$$

$$= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} = \{ (x, x) : x \in \mathbb{R} \}$$

$$= \langle (1, 1) \rangle$$

Así tenemos que en la base $B = \{ (1, -1), (1, 1) \}$

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$