ÁLGEBRA	**Grado en Ingeniería Informática** **Curso 2023–24**	**Examen** **7/6/2024**

APELLIDOS:____

NOMBRE:____________________________

GRUPO **112**

1a	**1b**	**2**	**3a**	**3b**	**3c**	**4a**	**4b**	**4c**
10	5	10	5	5	5	5	5	5

5a	**5b**	**5c**	**5d**	**6a**	**6b**	**7a**	**7b**	**7c**
5	5	5	5	5	5	5	5	5

Razonar debidamente las respuestas

3 horas

FINAL

/100

---

1. Calcular todas las soluciones $x, y \in \mathbb{Z}$ de las siguientes ecuaciones:

a) $267x + 112y = 3$.

b) $376x + 72y = 18$.

---

2. Demostrar que 5 divide a $3^{4n} - 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

---

3. Sea $\mathbb{R}_{>0}$ el conjunto de los números reales estrictamente positivos. Se define la función $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \frac{x}{x+1}.$$

a) Demostrar que f es inyectiva.

b) Calcular $\mathrm{Im}(f)$.

c) Sea $f^n(x)$ la aplicación componer n veces f. Calcular $\mathrm{Im}(f^n)$.

---

4. En $\mathbb{R}^2$, para $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, se define la relación:

$$P_1 \mathcal{R} P_2 \iff x_1 y_1 = x_2 y_2.$$

a) Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

b) Determinar la clase de $(0, 0)$ y de $(1, 1)$.

c) Determinar el conjunto cociente $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$.

---

5. Consideramos los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} \quad \text{y} \quad V = \langle\{(1, 0, -1), (1, 1, 0)\}\rangle.$$

a) Describe V como el conjunto de soluciones de un sistema lineal de ecuaciones.

b) Calcula la dimensión de V. Justifica tu respuesta.

c) Calcula una base de $U \cap V$.

d) Calcula una base de $U + V$. Verifica que se da la fórmula de Grassmann.

---

6. Sea $f = f_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación asociada a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula una base del núcleo de f.

b) Calcula una base de la imagen de f.

---

7. Se considera $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por:

$$g(x, y) = (2x + y, x + 2y).$$

a) Calcula la matriz de g en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

b) Determina si g es diagonalizable.

c) Determina una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ formada por autovectores de g y la matriz de g en esta base $\mathcal{B}$.