Universidad Autónoma de Madrid | Álgebra. Curso 2022–23

Ingeniería Informática. | Examen final, convocatoria ordinaria, 13 de enero de 2023

APELLIDOS: ______________________________

NOMBRE: ______________________ DNI/NIE: ______________

1. (1 punto)

a) Pon un ejemplo de un conjunto A que cumpla

$$\{\varnothing\} \in \mathcal{P}(A), \qquad \{\{\varnothing\}\} \subset A \quad \text{y} \quad \{\{\varnothing\}\} \in A.$$

b) Pon un ejemplo de dos conjuntos A, B tales que $A \cap B \neq \varnothing$ y

$$A \times (B \setminus A) = \{(1,3), (1,5), (2,3), (2,5)\}.$$

2. (1 punto) Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+1 & \text{si } x < 0 \\ x-2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

a) Estudia si f es sobreyectiva.

b) Halla $f^{-1}([-1,1])$.

c) Calcula $f \circ f(1)$.

3. (1 punto) En el conjunto $\mathbb{Z}$ se considera la relación $\mathcal{R}$ definida por

$$a\mathcal{R}b \ \text{ cuando } \ |a| - |b| \text{ es múltiplo de } 3.$$

(Por supuesto, $|a|$ y $|b|$ denotan valor absoluto).

a) Demuestra que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

b) Describe $[1]$.

c) Describe por extensión el conjunto cociente $A/\mathcal{R}$ y halla su cardinal $\operatorname{card}(A/\mathcal{R})$.

4. (1 punto) Resuelve el siguiente problema planteándolo primero como una ecuación diofántica que debes resolver. No se permiten soluciones por tanteo.

Dos números positivos suman 258. El primero de ellos es múltiplo de 14 y el segundo es múltiplo de 22. Halla tales números.

5. (1 punto) Resuelve la ecuación $\overline{20}x = \overline{15}$ en $\mathbb{Z}_{25}$ y expresa las soluciones como clases de equivalencia $\overline{a}$ con $0 \leq a < 24$.

6. (1 punto) Halla el resto de $7^{302} + 12^{432} \cdot 5498 + 13^4 \cdot 2$ al dividirlo por 12.

7. (2 puntos) Sean U y V los subespacios de $\mathbb{R}^4$

$$U = \langle (1,-1,1,-1),(1,1,-1,-1) \rangle, \qquad V = \langle (1,-5,5,-1),(0,1,1,0) \rangle.$$

a) Halla una base de $U \cap V$.

b) Expresa el espacio $U + V$ como la solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con el menor número de ecuaciones posible.

8. (1 punto) Una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ cumple

$$f(1,0,0,0) = (1,1,1), \qquad f(0,1,0,0) = (1,1,0), \qquad f(0,0,1,0) = (1,0,0), \qquad f(0,0,0,1) = (-1,1,-1).$$

a) Calcula $f(2,-3,1,-1)$.

b) Calcula $f^{-1}(1,1,-1)$ y exprésalo como unas ecuaciones paramétricas.

9. (1 punto)

a) Dos subespacios U, V de $\mathbb{R}^5$ cumplen que V no está contenido en U. La dimensión de U es 4 y la de V es 3. Halla $\dim(U \cap V)$ y $\dim(U + V)$.

b) Una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ es sobreyectiva. Halla $\dim \operatorname{Nuc} f$.