

**Examen final**  
**24 de enero de 2022**

APELLIDOS: \_\_\_\_\_

NOMBRE: \_\_\_\_\_ DNI/NIE: \_\_\_\_\_ GRUPO: 111/112/113

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Cada ejercicio puntúa 1 punto.

**1)** Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- a) Para cualesquiera subconjuntos  $A, B, C$  de un conjunto  $\mathcal{U}$  se tiene  $(A \cup B)^c \cap C^c = (A \cup B \cup C)^c$ .
- b)  $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(\emptyset) \cup \{\emptyset\}$ .

2) Se considera la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x < -1, \\ x & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$$

- a) Halla  $f^{-1}(-4)$  y  $f^{-1}(4)$ .
- b) Estudia si  $f$  es inyectiva.
- c) ¿Es  $f$  sobreyectiva?

3) En el conjunto  $\mathbb{Z}$  se define la siguiente relación  $\mathcal{R}$ , para todo  $m, n \in \mathbb{Z}$ :

$$m \mathcal{R} n \text{ si existe } x \in \mathbb{Z} \text{ tal que } mn = x^2.$$

¿Es  $\mathcal{R}$  relación de equivalencia? En caso afirmativo, demostrar que la clase de equivalencia del 3 es infinita.

**4)** Dado un entero  $q \geq 1$ , calcula  $\text{mcd}(q, q + 2)$ .

**5)** Determinar cuántas soluciones positivas tiene la ecuación diofántica

$$21x + 51y = 1140.$$

**6)** Calcula el resto de dividir  $14^{81} + 3003 \cdot 80$  entre 75.

7) Sea  $U_1$  el subespacio de  $\mathbb{R}^4$  con base  $\mathcal{B}_1 = \{(1, -1, 1, 1), (1, -1, 1, -1)\}$ , y  $U_2$  el subespacio de  $\mathbb{R}^4$  con base  $\mathcal{B}_2 = \{(1, 1, -1, 1), (1, 1, -1, -1)\}$ .

- a) Halla una base de  $U_1 + U_2$ .
- b) Halla unas ecuaciones de  $U_1 + U_2$  con el menor número de ecuaciones posibles.

**8)** Dos subespacios  $U$  y  $V$  de  $\mathbb{R}^5$  cumplen  $\dim U = 1$  y  $\dim(U + V) = 2$ .

- Razona qué valores pueden tomar  $\dim V$  y  $\dim(U \cap V)$ .
- Si, además, se sabe que la suma  $U + V$  es directa, calcula  $\dim V$  y  $\dim(U \cap V)$ .

**9)** Razona si existe una aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que cumpla

$$f(1, 0) = (-1, -1, 1), \quad f(0, 1) = (1, 1, -2), \quad f(3, 2) = (-1, -1, 0).$$

En caso afirmativo, halla la matriz asociada a  $f$ .

**10)** Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

se pide

- a) Hallar los valores y vectores propios de  $A$ .
- b) Razonar si existen una matriz diagonal  $D$  y una matriz invertible  $P$  tales que  $A = PDP^{-1}$ , y, en caso afirmativo, calcular  $D$  y  $P$ .