

Examen final
24 de enero de 2022

APELLIDOS: _____

NOMBRE: _____ DNI/NIE: _____ GRUPO: 111/112/113

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Cada ejercicio puntúa 1 punto.

1) Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- a) Para cualesquiera subconjuntos A, B, C de un conjunto \mathcal{U} se tiene $(A \cup B)^c \cap C^c = (A \cup B \cup C)^c$.
- b) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(\emptyset) \cup \{\emptyset\}$.

2) Se considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x < -1, \\ x & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$$

- a) Halla $f^{-1}(-4)$ y $f^{-1}(4)$.
- b) Estudia si f es inyectiva.
- c) ¿Es f sobreyectiva?

3) En el conjunto \mathbb{Z} se define la siguiente relación \mathcal{R} , para todo $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$m \mathcal{R} n \text{ si existe } x \in \mathbb{Z} \text{ tal que } mn = x^2.$$

¿Es \mathcal{R} relación de equivalencia? En caso afirmativo, demostrar que la clase de equivalencia del 3 es infinita.

4) Dado un entero $q \geq 1$, calcula $\text{mcd}(q, q + 2)$.

5) Determinar cuántas soluciones positivas tiene la ecuación diofántica

$$21x + 51y = 1140.$$

6) Calcula el resto de dividir $14^{81} + 3003 \cdot 80$ entre 75.

7) Sea U_1 el subespacio de \mathbb{R}^4 con base $\mathcal{B}_1 = \{(1, -1, 1, 1), (1, -1, 1, -1)\}$, y U_2 el subespacio de \mathbb{R}^4 con base $\mathcal{B}_2 = \{(1, 1, -1, 1), (1, 1, -1, -1)\}$.

a) Halla una base de $U_1 + U_2$.

b) Halla unas ecuaciones de $U_1 + U_2$ con el menor número de ecuaciones posibles.

8) Dos subespacios U y V de \mathbb{R}^5 cumplen $\dim U = 1$ y $\dim(U + V) = 2$.

a) Razona qué valores pueden tomar $\dim V$ y $\dim(U \cap V)$.

b) Si, además, se sabe que la suma $U + V$ es directa, calcula $\dim V$ y $\dim(U \cap V)$.

9) Razona si existe una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que cumpla

$$f(1, 0) = (-1, -1, 1), \quad f(0, 1) = (1, 1, -2), \quad f(3, 2) = (-1, -1, 0).$$

En caso afirmativo, halla la matriz asociada a f .

10) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

se pide

- a) Hallar los valores y vectores propios de A .
- b) Razonar si existen una matriz diagonal D y una matriz invertible P tales que $A = PDP^{-1}$, y, en caso afirmativo, calcular D y P .