

**Examen final, convocatoria extraordinaria**  
**10 de junio de 2022**

APELLIDOS: \_\_\_\_\_

NOMBRE: \_\_\_\_\_ DNI/NIE: \_\_\_\_\_ GRUPO: 111/112/113

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Cada ejercicio puntúa 1 punto.

- 1)** a) Pon un ejemplo de tres conjuntos  $A, B, C$ , ninguno de ellos vacío, para los que  $(A \setminus B) \cup C = A \cup (C \setminus B)$  y pon otro ejemplo para los que  $(A \setminus B) \cup C \neq A \cup (C \setminus B)$ .
- b) Calcula  $\mathcal{P}(\emptyset) \cup \mathcal{P}(\{\emptyset\})$ .

2) Se considera la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0, \\ 3x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

- a) Calcula  $(f \circ f)(-2)$ .
- b) Describe  $f(f^{-1}(9))$ .
- c) Halla dos intervalos  $(a, b)$  y  $(c, d)$  para los que  $f|_{(a, b)}$  sea inyectiva y  $f|_{(c, d)}$  no lo sea.

3) En el conjunto  $\mathbb{R}$  se define la siguiente relación de equivalencia  $\mathcal{R}$ : para  $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$x \mathcal{R} y \iff x^2 - x = y^2 - y.$$

Se pide:

- a) Halla  $[\frac{1}{2}]$ .
- b) Para cualquier  $a > \frac{1}{2}$ , halla  $[a]$ .
- c) Establece una aplicación biyectiva entre el conjunto cociente  $\mathbb{R}/\mathcal{R}$  y el intervalo  $[\frac{1}{2}, \infty)$ .

4) Dado un entero  $q \geq 1$  que no sea múltiplo de 3, calcula  $\text{mcd}(q, q + 3)$ .

5) Determinar cuántas soluciones positivas tiene la ecuación diofántica

$$22x + 26y = 738.$$

6) Calcula el resto de dividir  $16^{81} + 3002 \cdot 79$  entre 75.

7) Sea  $U_1$  y  $U_2$  los subespacios de  $\mathbb{R}^4$  de ecuaciones

$$U_1 : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad U_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

- a) Halla unas ecuaciones de  $U_1 \cap U_2$  con el menor número de ecuaciones posibles.
- b) Halla una base de  $U_1 \cap U_2$ .

**8)** Dos subespacios  $U$  y  $V$  de  $\mathbb{R}^5$  cumplen  $\dim U = 1$  y  $\dim(U + V) = 3$ .

a) Razona qué valores pueden tomar  $\dim V$  y  $\dim(U \cap V)$ .

b) Si, además, se sabe que la suma  $U + V$  es directa, calcula  $\dim V$  y  $\dim(U \cap V)$ .

**9)** Una aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  cumple

$$f(-3, 0) = (0, 0, 6), \quad f(0, 2) = (-2, 0, 2).$$

Calcula  $f(2, -1)$ .



**10)** Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

se pide

- a) Hallar los valores y vectores propios de  $A$ .
- b) Razonar si existen una matriz diagonal  $D$  y una matriz invertible  $P$  tales que  $A = PDP^{-1}$ , y, en caso afirmativo, calcular  $D$  y  $P$ .