

Examen final, convocatoria extraordinaria
10 de junio de 2022

APPELLIDOS: _____

NOMBRE: _____ DNI/NIE: _____ GRUPO: 111/112/113

<input type="text"/>										
----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------

Cada ejercicio puntúa 1 punto.

- 1) a) Pon un ejemplo de tres conjuntos A, B, C , ninguno de ellos vacío, para los que $(A \setminus B) \cup C = A \cup (C \setminus B)$ y pon otro ejemplo para los que $(A \setminus B) \cup C \neq A \cup (C \setminus B)$.
- b) Calcula $\mathcal{P}(\emptyset) \cup \mathcal{P}(\{\emptyset\})$.

2) Se considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0, \\ 3x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

- a) Calcula $(f \circ f)(-2)$.
- b) Describe $f(f^{-1}(9))$.
- c) Halla dos intervalos (a, b) y (c, d) para los que $f|_{(a,b)}$ sea inyectiva y $f|_{(c,d)}$ no lo sea.

3) En el conjunto \mathbb{R} se define la siguiente relación de equivalencia \mathcal{R} : para $x, y \in \mathbb{R}$:

$$x \mathcal{R} y \iff x^2 - x = y^2 - y.$$

Se pide:

- Halla $[\frac{1}{2}]$.
- Para cualquier $a > \frac{1}{2}$, halla $[a]$.
- Establece una aplicación biyectiva entre el conjunto cociente \mathbb{R}/\mathcal{R} y el intervalo $[\frac{1}{2}, \infty)$.

4) Dado un entero $q \geq 1$ que no sea múltiplo de 3, calcula $\text{mcd}(q, q + 3)$.

5) Determinar cuántas soluciones positivas tiene la ecuación diofántica

$$22x + 26y = 738.$$

6) Calcula el resto de dividir $16^{81} + 3002 \cdot 79$ entre 75.

7) Sea U_1 y U_2 los subespacios de \mathbb{R}^4 de ecuaciones

$$U_1 : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad U_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

- Halla unas ecuaciones de $U_1 \cap U_2$ con el menor número de ecuaciones posibles.
- Halla una base de $U_1 \cap U_2$.

8) Dos subespacios U y V de \mathbb{R}^5 cumplen $\dim U = 1$ y $\dim(U + V) = 3$.

- Razona qué valores pueden tomar $\dim V$ y $\dim(U \cap V)$.
- Si, además, se sabe que la suma $U + V$ es directa, calcula $\dim V$ y $\dim(U \cap V)$.

9) Una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cumple

$$f(-3, 0) = (0, 0, 6), \quad f(0, 2) = (-2, 0, 2).$$

Calcula $f(2, -1)$.

10) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

se pide

- a) Hallar los valores y vectores propios de A .
- b) Razonar si existen una matriz diagonal D y una matriz invertible P tales que $A = PDP^{-1}$, y, en caso afirmativo, calcular D y P .