

1. Encuentra una fórmula de recurrencia para calcular

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

en función de  $D_{n-1}$  y  $D_{n-2}$ . Utilizala para calcular  $D_8$  y  $D_9$ .

2. Calcular el determinante del endomorfismo de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 5b & b + 3c + 2d \\ c - d & d \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz  $A$  de  $f$  respecto de la base

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

así como su determinante.

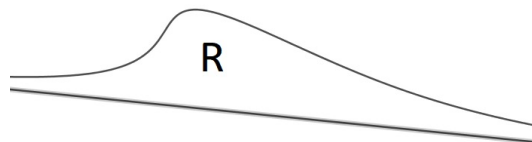
3. Sean  $a, b, c$  números reales positivos. El *elipsoide sólido de semiejes  $a, b, c$*  es la siguiente región sólida:

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1 \right\}.$$

Halla la preimagen  $f^{-1}(S)$ , siendo  $f(x, y, z) = (ax, by, cz)$ . Demuestra que el volumen de  $S$  es  $\frac{4}{3} \pi abc$ .

4. Sea  $R \subset \mathbb{R}^2$  la región plana comprendida entre la recta  $L$  y la curva de tercer grado  $\Gamma$ , dadas por:

$$L = \{ (x, y) : x + 10y = 0 \} \quad , \quad \Gamma = \{ (x, y) : ((0'1)x + y) \cdot [1 + (x + y)^2] = 1 \}.$$



a) Halla la imagen  $F(R)$ , siendo  $F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ .

b) Calcula explícitamente el área de  $R$ .

5. Sean  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ ,  $B \in M_{m \times m}(\mathbb{K})$ ,  $C \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$  y  $D \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ .

a) Demuestra que  $\det \left( \begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array} \right) = \det A \cdot \det B$ .

b) ¿Es cierto que  $\det \left( \begin{array}{c|c} A & C \\ \hline D & B \end{array} \right) = \det A \cdot \det B - \det C \cdot \det D$ ?

6. Sean  $E$  un espacio vectorial de dimensión  $n + m$  y  $f : E \rightarrow E$  un endomorfismo. Sea  $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+m}\}$  una base de  $E$  y pongamos  $F = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ .

a) Demuestra que las condiciones siguientes son equivalentes:

1. La matriz de  $f$ , usando  $\mathcal{B}$  en salida y en llegada, es de la forma  $\left( \begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$ , con  $A$  matriz  $n \times n$  etc,

2. Se cumple  $\mathbf{v} \in F \implies f(\mathbf{v}) \in F$ , es decir  $f(F) \subseteq F$ .

b) Demuestra que, si  $f(F) \subseteq F$ , entonces hay endomorfismos  $g$  y  $h$  bien definidos por las siguientes fórmulas:

$$g : F \longrightarrow F \quad , \quad h : E/F \longrightarrow E/F \\ \mathbf{v} \longmapsto f(\mathbf{v}) \quad , \quad \mathbf{v} + F \longmapsto f(\mathbf{v}) + F \quad ,$$

que la matriz de  $g$  en la base  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es  $A$ , que la matriz de  $h$  en la base  $\{\mathbf{v}_{n+1} + F, \dots, \mathbf{v}_{n+m} + F\}$  es  $B$  y que el resultado del ejercicio 5 equivale a  $\det f = \det g \cdot \det h$ .

7. Sea  $f : \mathcal{M}_{2 \times 3} \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 3}$  el endomorfismo definido por

$$f \left( \begin{array}{ccc} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc} 2a & 2b & 4c \\ 3a' & 3b' & 4c' \end{array} \right)$$

Se pide:

a) Si  $F$  es el subespacio  $F = \left\{ \left( \begin{array}{ccc} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array} \right) \middle/ \begin{array}{l} a + b = 0 \\ a' + b' = 0 \\ c + c' = 0 \end{array} \right\}$ , demostrar que  $f$  induce un endomorfismo  $f|_F : F \rightarrow F$  definido por la misma fórmula que  $f$ . Calcular su determinante.

b) Probar que  $f$  induce también un endomorfismo  $\bar{f}$  del espacio cociente  $\mathcal{M}_{2 \times 3}/F$ . Calcular su determinante.

c) Relacionar los determinantes de  $f$ ,  $\bar{f}$  y  $f|_F$ .

8. Sea  $V$  un espacio vectorial,  $V^*$  su dual, y  $f, g \in V^*$ . Representamos por  $f \wedge g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  la aplicación dada por  $f \wedge g(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = f(\vec{v}_1)g(\vec{v}_2) - f(\vec{v}_2)g(\vec{v}_1)$ .

a) Demostrar que  $f \wedge g$  es una forma bilineal sobre  $V$ , que es alternada y que satisface  $f \wedge g = -g \wedge f$ .

Representemos por  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  su base canónica de  $\mathbb{R}^2$  y por  $\{E_1^*, E_2^*\}$  la base dual. Considerar la forma bilineal alternada  $E_1^* \wedge E_2^*$  del apartado anterior.

b) Probar que si  $D$  es la única forma bilineal alternada sobre  $\mathbb{R}^2$  tal que  $D(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1$ , entonces  $D = E_1^* \wedge E_2^*$ .