Grado de Matemáticas

Hoja 8: Determinantes

1. Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 1 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 6 & 2 & 7 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -3 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & -4 & 8 \end{vmatrix}.$$

2. Sabiendo que $58786, 30628, 12831, 80743$ y 16016 son divisibles por 13, demostrar que

$$\begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 8 & 6 \\ 3 & 0 & 6 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & 1 \\ 8 & 0 & 7 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

es también divisible por 13.

3. Sea A la matriz definida por $a_{ij} = |i-j|$. Calcular $|A|$.
(Sugerencia: Empezar restando a cada columna la anterior. Sol: $(-1)^{n+1}(n-1)2^{n-2}$)

4. Calcular

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & .. & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & 4 & .. & n-1 & n \\ 1 & 2 & 4 & 4 & .. & n-1 & n \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 1 & 2 & 3 & 4 & .. & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & .. & n & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & .. & n-1 & n+1 \end{vmatrix}$$

(Sugerencia: sumar primero todas las columnas. Sol: $\frac{n(n+1)+2}{2}$)

5. (Determinante de Vandermonde). Dados $x_1, ..., x_n \in \mathbb{K}$, demuestra la igualdad:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & ... & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & & x_2^{n-1} \\ .. & .. & .. & .. \\ 1 & x_n & & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (x_j - x_i) \ .$$

(Sugerencia: Razonar por inducción. Empieza restando a cada columna la anterior multiplicada por x_1)

6. Un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$ con coeficientes reales es una expresión de la forma
$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, con $a_j \in \mathbb{R}, j = 0, 1, \ldots, n$ y $a_n \neq 0$.

a) Demostrar que $n+1$ valores distintos de la variable x determinan de manera única un polinomio de grado n. (Sugerencia: Usar el determinante de Vandermonde.)

b) Demostrar que si un polinomio de grado n tiene $n+1$ soluciones reales distintas ha de ser el polinomio nulo.

7. Resolver los siguientes sistemas utilizando la regla de Cramer:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} 3x+2y+4z=1 \\ 2x-y+z=0 \\ x+2y+3z=1 \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} 3x+2y+4z+t=1 \\ 2x-y+z-3t=6 \\ x+2y+3z-t=1. \end{array} \right.$$

8. Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{Z})$ una matriz cuadrada con entradas enteras. Demostrar que existe $B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{Z})$ tal que $AB = BA = I_n$ si y sólo si $\det A = \pm 1$.

9. Sean $n \geq 3$ y A matriz $n \times n$.

a) Demostrar que si $\operatorname{rango}(A) = n-1$ entonces la **matriz de cofactores** $C(A)$ tiene rango$=1$.

b) Demostrar que si $\operatorname{rango}(A) \leq n-2$ entonces $C(A) = 0_{n\times n}$.

10. Una matriz cuadrada A si dice *simétrica* si $A = A^t$ y se dice *antisimétrica* si $A = -A^t$.

a) Demostrar que toda matriz cuadrada se puede escribir como una suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

b) Demostrar que si A es antisimétrica y de orden impar, $|A| = 0$.

c) ¿Es cierto el resultado de la parte b) si A es de orden par?

11. Sea $A \in \mathbb{M}_{r\times n}(\mathbb{K})$ una matriz con $0 < r < n$. Demostrar que $\det(A^t A) = 0$.

12. Sea $n = 1, 2, \ldots$.

a) Deducir una fórmula para calcular $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ y demostrarla por inducción.

b) Deducir una fórmula para calcular $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ y demostrarla por inducción.

13. Hallar los valores de m para los que el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x-y+z=0 \\ x+my-z=0 \\ x+y+z=0 \end{array} \right.$$

posee soluciones no triviales.

14. Utilizar determinantes para hallar la inversa de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Hallar las soluciones generales de los siguientes sistemas usando determinantes:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ -x+3y=0 \\ 2x+6y+3z=3 \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} 3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0 \\ 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0 \\ x_1+11x_2-12x_3+34x_4-5x_5=0 \\ x_1-5x_2+2x_3-16x_4+3x_5=0 \end{array} \right.$$