Grado de Matemáticas

Hoja 7: Dualidad

1. Sea $\mathcal{C}$ la base canónica de de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{C}^*$ su base dual. Dada la siguiente base de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

halla la base dual $\mathcal{B}^*$, expresando sus elementos en términos de las coordenadas en la base $\mathcal{C}^*$.

2. Sean $E_1^*, E_2^*, E_3^* : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ los elementos de la base dual estándar de $\mathbb{R}^3$.

(a) Comprueba que los elementos $E_1^* - E_2^* + 5E_3^*$, $3E_1^* + E_2^* + E_3^*$, $2E_2^* - E_3^*$ forman una base de $(\mathbb{R}^3)^*$.

(b) Halla la base de $\mathbb{R}^3$ de la cual $\{ E_1^* - E_2^* + 5E_3^*,\ 3E_1^* + E_2^* + E_3^*,\ 2E_2^* - E_3^*\}$ es dual.

(c) Halla una base del anulador de $\langle 3E_1^* + E_2^* + E_3^*,\ 2E_2^* - E_3^*\rangle$.

3. Calcula las bases de $(\mathbb{R}^2)^*$ duales de $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y de $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$. ¿Hay algún vector compartido por $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$? ¿Hay algún elemento compartido por las duales?

4. En $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases canónica, $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$,

$\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1 = (1,0,1), \vec{u}_2 = (-1,1,1), \vec{u}_3 = (1,-1,0)\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\vec{v}_1 = (2,1,1), \vec{v}_2 = (1,1,1), \vec{v}_3 = (1,-1,1)\}$.

(a) Calcula sus bases duales expresadas en la dual de la base canónica.

(b) Todo elemento del dual $\omega \in (\mathbb{R}^3)^*$ se puede expresar en cualquiera de las 3 bases duales:

$$\mathcal{C}^* = \{E_1^*, E_2^*, E_3^*\}; \qquad \mathcal{B}_1^* = \{U_1^*, U_2^*, U_3^*\}; \qquad \mathcal{B}_2^* = \{V_1^*, V_2^*, V_3^*\}.$$

Calcula las matrices de cambio de base

$$P_1 : \text{ de } \mathcal{C}^* \text{ a } \mathcal{B}_2^*; \quad P_2 : \text{ de } \mathcal{B}_1^* \text{ a } \mathcal{C}^*; \quad P_3 : \text{ de } \mathcal{B}_2^* \text{ a } \mathcal{B}_1^*.$$

(c) Expresa la matriz identidad como el producto, en el orden adecuado, de las tres matrices anteriores.

(d) Calcula las coordenadas en la base $\mathcal{B}_1^*$ de la forma lineal cuyas coordenadas en la base $\mathcal{B}_2^*$ son $(3,-2,1)$.

5. Sea E el espacio vectorial de los polinomios reales $p(x)$ de grado no mayor que 2. Definimos formas lineales $\ell_1, \ell_2, \ell_3 : E \to \mathbb{R}$ mediante: $\ell_1[p(x)] = p(0)$, $\ell_2[p(x)] = p'(0)$ y $\ell_3[p(x)] = p''(0)$.

(a) Demuestra que $\mathcal{B}_0^* = \{ \ell_1, \ell_2, \ell_3 \}$ es una base de E^*.

(b) Dada la siguiente base de E: $\mathcal{B}_1 = \{ x, 1 + x^2, 3x - x^2 \}$, halla la base dual $\mathcal{B}_1^*$, expresando sus elementos como combinaciones lineales de ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3.

6. Sean $E_1^*, E_2^*, E_3^* : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ los elementos de la base dual estándar de $\mathbb{R}^3$.
Sea $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo dado por $A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}$ y sea A^* el endomorfismo dual.

(a) Halla la matriz de A^* usando la base $\{E_1^*, E_2^*, E_3^*\}$ tanto en salida como en llegada,

(b) Halla la matriz de A^* usando la base $\{E_1^*,\ E_1^* + E_2^*,\ E_1^* + E_2^* + E_3^*\}$ en salida y la base $\{E_1^*, E_2^*, E_3^*\}$ en llegada.

7. Sea $f : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ la aplicación lineal dada por

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+5b & b+3c+2d \\ c-d & d \end{pmatrix}.$$

Sea $f^* : \big(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\big)^* \to \big(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\big)^*$ su aplicación dual.

(a) Encuentra la matriz A^* de f^* respecto de la base canónica $\mathcal{C}^*$ (tanto en el espacio de partida como en el de llegada).

(b) Encuentra la matriz D^* de f^* respecto de la base $\mathcal{C}^*$ y la dual de la base $\mathcal{B}$ formada por los elementos siguientes:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Encuentra las coordenadas de la forma lineal $f^*(E_1^+ + E_2^* + 2E_3^* + E_4^*)$ respecto de $\mathcal{B}^*$.

8. Se considera en $(P^{(1)}[x])^*$, el espacio dual de $P^{(1)}[x]$, las formas lineales $I_{r,s}$ dadas por la siguiente regla:

$$\begin{aligned} I_{r,s} : P^{(1)}[x] &\longrightarrow \mathbb{R}. \\ a + bx &\longmapsto \int_{-1}^{1} (r+sx)(a+bx)\,dx \end{aligned}$$

para ciertos r, s fijados. Se considera $\mathcal{C} = \{e_1 = 1, e_2 = x\}$ la base canónica de $P^{(1)}[x]$.

(a) Encontrar formas lineales f_1 y f_2 del tipo anterior, tales que $f_i(e_j) = 1$ si $i = j$ y 0 en otro caso. En otras palabras, describir la base dual de la canónica de $P^{(1)}[x]$ en términos de formas lineales del tipo $I_{r,s}$.

(b) Calcular la matriz de la dual de la aplicación $D : P^{(1)}[x] \longrightarrow P^{(1)}[x]$ que a cada polinomio le asocia su derivado, en la base $\{f_1, f_2\}$.

9. Sean $f_1, f_2 : P^{(3)}[x] \longrightarrow \mathbb{R}$. las formas dadas por:

$$f_1(a + bx + cx^2 + dx^3) = b + 2c + 3d\,, \qquad f_2(p(x)) = 2p(1) - p(0)$$

respectivamente. Considerando bases canónicas y sus duales, calcular:

(a) $\mathrm{Ker}(f_1)$, $\mathrm{Ker}(f_2)$, $\mathrm{Im}(f_1^*)$ e $\mathrm{Im}(f_2^*)$.

(b) $\mathrm{Im}(f_1)$, $\mathrm{Im}(f_2)$, $\mathrm{Ker}(f_1^*)$ y $\mathrm{Ker}(f_2^*)$.

(c) $\mathrm{Ann}(\{f_1, f_2\})$.

(d) $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ker}\, f_1 \cap \mathrm{Ker}\, f_2)$.

Comprobar en cada caso que las dimensiones son las esperadas.