

Hoja 6: Aplicaciones lineales. Cambio de base.

1. Sean \mathbb{K} un cuerpo y V, W espacios vectoriales sobre \mathbb{K} . Si $f : V \rightarrow W$ y $g : V \rightarrow W$ son aplicaciones lineales, demuestra que:

- (a) $\ker f \cap \ker g \subset \ker(f + g)$.
- (b) Si $\text{Im } f \cap \text{Im } g = \{0\}$, entonces $\ker f \cap \ker g = \ker(f + g)$.

2. En \mathbb{R}^3 se consideran las bases

$$\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 1), (1, -1, 0)\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{(2, 1, 1), (1, 1, 1), (1, -1, 1)\}.$$

- (a) Calcula la matriz de $\text{id}_{\mathbb{R}^3}$ usando \mathcal{B}_1 en salida y \mathcal{B}_2 en llegada.
- (b) Calcula la matriz de $\text{id}_{\mathbb{R}^3}$ usando \mathcal{B}_2 en salida y \mathcal{B}_1 en llegada.

3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$.

- a) Determina la matriz A de f usando la base estándar en salida y en llegada.
- b) Determina la matriz M de f usando la base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (2, 3, -1), (0, 0, 1)\}$ en salida y en llegada.
- c) Sea P la matriz cuyas columnas son los vectores de \mathcal{B} . Deduce, del cálculo que has hecho en b), la igualdad $AP = PM$.
- d) Describe P como la matriz de $\text{id}_{\mathbb{R}^3}$ en ciertas bases y vuelve a deducir $AP = PM$.

4. Sean $V_1, V_2 \subset V$ dos subespacios vectoriales de V que son complementarios mutuos: $V = V_1 \oplus V_2$. Definimos una aplicación $T : V \rightarrow V$ de la manera siguiente:

Dado $u \in V$, hay $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$ únicos tales que $u = v_1 + v_2$, entonces hacemos $T(u) \stackrel{\text{def}}{=} v_1$.

Llamamos a T la *proyección de V sobre V_1 en la dirección de V_2* .

- (a) Demuestra que T es lineal. Halla su imagen y su núcleo. Demuestra que $T \circ T = T$.
- (b) Halla la matriz de T en una base $\{w_1, \dots, w_{n+r}\}$, resultado de tomar una base $\{w_1, \dots, w_n\}$ de V_1 y poner a continuación una base $\{w_{n+1}, \dots, w_{n+r}\}$ de V_2 .
- (c) Sean $V = \mathbb{R}^2$ y $u = (2, 1)$. Proyecta u sobre el eje $\langle \mathbf{e}_1 \rangle$ de abscisas en la dirección del eje $\langle \mathbf{e}_2 \rangle$ de ordenadas. Proyecta u sobre el eje de abscisas en la dirección de la recta $\langle (1, 3) \rangle$. Haz un dibujo.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}$.

- a) Halla, si es posible, una base \mathcal{B} de \mathbb{R}^2 tal que la matriz de f respecto de \mathcal{B} en salida y llegada sea $M = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Misma pregunta con $M = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y con $M = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

b) Determina una igualdad $A = P \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} Q$, con P y Q inversas mutuas. Usa esta igualdad para hallar una raíz cuadrada de A , es decir una matriz R tal que $RR = A$.

6. Consideramos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ -4 & -2 & 1 & 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Utiliza el método de Gauss para hallar una base de $\text{Im } f$ y una de $\text{ker } f$.

b) Extiende la base de $\text{ker } f$ a una de \mathbb{R}^6 , añadiendo vectores de la base estándar.

c) Utiliza el resultado para dar una base del espacio cociente $\mathbb{R}^6 / \text{ker } f$.

7. Sean V, W , espacios vectoriales, $F \subseteq V$ un subespacio vectorial y $f : V \rightarrow W$ una función lineal. Demuestra que si $F \subseteq \text{ker } f$ entonces la fórmula $g(v + F) = f(v)$ define correctamente una aplicación $g : V/F \rightarrow W$ y que esta g así definida es lineal.

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$.

a) ¿Por qué es $(f \circ f)(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 11 \end{bmatrix} \mathbf{x}$?

b) Halla la matriz A de f respecto de la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en salida y la base estándar en llegada.

c) Halla la matriz B de $f^2 = f \circ f$ respecto de \mathcal{B} en salida y la base estándar en llegada.

d) Explica por qué $B \neq A^2$.

9. Para cada $a \in \mathbb{R}$ definimos $T_a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $T_a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

a) Halla la matriz A_a de T_a respecto de la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en salida y la base estándar en llegada.

b) Halla la matriz B_a de T_a respecto de la base estándar en salida y la base \mathcal{B} en llegada.

c) Comprueba que A_a y B_a no son inversas la una de la otra, excepto si $a = 0$. Explica este fenómeno (indicación: para todo a calcula la compuesta $T_a \circ T_a$).